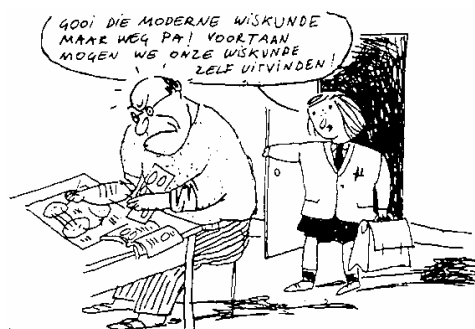


# 146

## Mad Math en Math War

Themanummer Onderwijskrant & O-ZON-katern



Wiskunde-oorlog en reddingsoperatie in Nederland

National Mathematics Advisory Panel pleit voor  
*computational proficiency plus conceptual understanding*

Kritiek van prof. Jan van der Craats  
op 'realistisch' wiskunde-onderwijs van Freudenthal Instituut

Marjolein Kool, hoofdredactrice 'Volgens Bartjens', bekend:  
*'Te weinig parate kennis en veel te weinig inoefenen'*

Kritiek op 'realistische' aanpak n.a.v. PPON- onderzoek 1997

Inzet voor evenwichtige rekendidactiek & leerplannen (1971-2008)  
& verzet tegen new math en constructivistische math

Volkvertegenwoordiger Hoebeke bekritiseerde sympathie  
Vlaamse overheid voor 'realistische' rekenaanpak

Gemeenschappelijk & lichter leerplan in secundair onderwijs:  
*minder rekenvaardigheid en abstractie, meer constructivisme*

'Telling lessons from the TIMSS videotape':  
*guided instruction* in Japan levert schitterende wiskunde-prestaties op

Mathematically Correct: "Don't believe it. 'Reform math' in the U.S.  
*does not mirror what successful countries (Japan ...) use*"

Context- of gesitueerd rekenen remt inzicht en transfer af

## Themanummer: mad math en math-war

$1 + 1 = 2$ ; of toch niet? Het vak wiskunde lijkt op een eerste gezicht een exact vak waarover weinig discussie mogelijk is. De math-wars van de voorbije 40 jaar bewijzen dat dit niet het geval is. De professoren Holvoet en Vermandel maakten ons tijdens een zomercursus in 1968 wijs dat de *klassieke wiskunde op leren voeten stond* en totaal voorbijgestreefd was. We voerden vanaf 1971 vanuit de Torhoutse Normaalschool een lange en geslaagde kruistocht tegen de formalistische *moderne wiskunde*. Vanaf 1987 kwam daar de strijd bij tegen het oprukkende *constructivisme* binnen het realistisch wiskundeonderwijs van het Freudenthal Instituut (verder FI) – dat ook in Vlaanderen veel aanhangers telde. Tegelijk werkten we aan uitgebalanceerde vakdidactische publicaties voor het basisonderwijs – met veel aandacht voor de beproefde waarden.

Bij de invoering van de constructivistische ‘Standards’ (eindtermen) in 1989 brak in de VS prompt een oorlog uit tussen de voor- en tegenstanders van het constructivisme. Ook in Nederland wordt er sinds een paar jaar een ‘oorlog gevoerd’ tussen de voor- en tegenstanders van de realistische en constructivistische aanpak van het FI. Als lid van de eindtermencommissie basisonderwijs (1993) en van de leerplancommissie VVKaBaO (1996) slaagden we er in de constructivistische invloed in het basisonderwijs af te remmen. Beproefde waarden werden in ere hersteld. Het constructivistisch gevaar is evenwel nog niet geweken. Zowel de DVO (Dienst voor Onderwijsontwikkeling) als de VLOR (Vlaamse Onderwijsraad) verkondigen geregeld dat we in de toekomst veel meer de *constructivistische* en *competentiegerichte* richting uit moeten.

Op het niveau van het secundair en hoger onderwijs valt er in Vlaanderen meer kritiek te beluisteren – ondermeer omtrent de daling van het niveau en het onvoldoende voorbereid zijn op het hoger onderwijs. Tijdens een recent radioprogramma in mei j.l. betreurde *prof. Alfred Warrinnier* dat de ‘moderne wiskunde’ vervangen werd door een andere eenzijdige visie, deze van de constructivistische ‘fuzzy mathematics’. Andere critici hebben analoge kritiek bij het nieuwe leerplan 2009 (VVKSO).

Dit themanummer is volledig gewijd aan het wiskundeonderwijs – met veel aandacht voor de malaise en de wiskunde-oorlog in Nederland. Het wiskundeonderwijs holt op alle niveaus achteruit – volgens een aantal officiële rapporten, het ministerie en de inspectie, de kranten en andere commentaren. Dit is

volgens critici vooral het gevolg van de constructivistische en te weinig gestructureerde en vakspecifieke aanpak van het *realistisch wiskundeonderwijs* dat de voorbije decennia door het FI gepromoot werd. Toen we merkten dat de Freudenthalers de kritiek ridiculiseerden en als recent voorstelden, stuurden we een samenvatting van onze veelzijdige kritiek – sinds 1987 – naar een paar critici. Die samenvatting werd op de BON-website veelvuldig gelezen en sterk geapprecieerd.

In een eerste bijdrage gaan we uitvoerig in op de wiskunde-oorlog en de hersteloperatie in Nederland. Daarna volgen de conclusies uit het recente advies van de National Mathematics Advisory Panel in de VS. Vervolgens verwoordt prof. Jan van de Craats zijn kritiek op het ‘realistisch’ wiskundeonderwijs van het FI. Zonder kennis van onze kritiek komt de wiskunde-professor tot ongeveer dezelfde conclusies. In ‘*Kritiek op realistische FI-aanpak n.a.v. PPOnderzoek 1997*’ illustreren we vervolgens dat de kritiek op de FI-aanpak niet nieuw is. Daarna staan we lang stil bij de eigen inzet en strijd voor een evenwichtige rekendidactiek & voor uitgebalanceerde leerplannen (1971-2008). We besteden hierbij veel aandacht aan het verzet tegen het realistisch/constructivistisch wiskundeonderwijs. In een intermezzo citeren we een tussenkomst in de Vlaamse onderwijscommissie waarbij een volksvertegenwoordiger de sympathie van de overheid, de DVO e.d. voor de realistische en constructivistische aanpak bekritiseerde.

Ten slotte volgen nog een viertal bijdragen over *wiskunde in het secundair onderwijs*. We stellen vooreerst kritische vragen bij het Vlaams leerplan 2009 voor de 1<sup>ste</sup> graad: een gemeenschappelijk en lichter leerplan voor alle leerlingen met nog minder aandacht voor abstractie en rekenvaardigheid. De leerplanontwerpers pleiten er ook voluit voor een constructivistische en competentiegerichte methodiek.

Het nefaste van de gepropageerde aanpak blijkt ook uit de laatste 3 bijdragen. Volgens een videotape-onderzoek heeft de sterke TIMSS-score van de Japanse 14-jarigen alles te maken met het feit dat het leerproces er veel sterker gestuurd wordt dan in de Verenigde Staten e.d. Dit is ook het standpunt van ‘*Mathematically Correct*’. De laatste bijdrage illustreert de gevaren van het overbeklemtonen van het rekenen vanuit contexten of ‘situations-problèmes’.

Reacties zijn welkom:  
[owkrant@hotmail.com](mailto:owkrant@hotmail.com) en [raf.feys@telenet.be](mailto:raf.feys@telenet.be)

## Wiskunde-oorlog en reddingsoperatie in Nederland

Raf Feys en Pieter Van Biervliet

### 1 Rekenoorlog: malaise en rol FI

#### 1.1 Rekenoorlog

Het Nederlands wiskundeonderwijs haalde de voorbije 2 jaar voortdurend de voorpagina van de kranten. Helemaal niet in positieve zin. Er is zelfs sprake van een wiskunde-oorlog. Volgens een aantal officiële rapporten, de ministers, de inspectie, de kranten en andere commentaren holt het wiskundeonderwijs op alle niveaus gevoelig achteruit. De leerlingen kunnen niet vlot meer rekenen en bij de start van het hoger onderwijs duiken steeds meer lacunes op. De overheid greep in. In mei j.l. werd een grootschalig en duur herstelplan afgekondigd voor het basisonderwijs, het voortgezet onderwijs en de lerarenopleiding. Staatssecretaris van *Bijsterveldt* voerde ook al nieuwe richtlijnen in voor de herziening en verzwaring van de exameneisen wiskunde in het secundair onderwijs. In een brief met uitleg hierover aan de Tweede Kamer van 13 juni j.l. schreef de staatssecretaris: *"Er waren twijfels over de 'realistische' wiskunde – ook verwoord door de Commissie Dijsselbloem. Verder twijfelden sommige Kamerleden of er wel voldoende aandacht was voor 'inoefenen, ze wezen ook op de bijspijkerkursussen in het hoger onderwijs en het tekort aan aandacht voor basale en abstracte wiskunde, en ze hadden aarzelingen bij de rol van instellingen als Freudenthal Instituut (FI) en SLO."*

De commissie *Parlementair Onderzoek Onderwijs-vernieuwingen* ('commissie Dijsselbloem') kloeg in haar eindrapport over het rekenpeil (2008, p. 116): *"Uit de PPON peiling blijkt dat er sinds 1987 een negatieve ontwikkeling is op het gebied van de vaardigheid van kinderen met bewerkingen. Het peil daarvan is systematisch aan het dalen."* In het *PPON 2004-rapport* lezen we dat *"dit zowel geldt voor optellen en aftrekken als voor vermenigvuldigen en delen en de samengestelde bewerkingen."* Ook de commissie Meijerink' concludeerde in 2007: *"Over een groot aantal jaren, en de laatste jaren zelfs versneld, treedt een daling op in rekenvaardigheid bij leerlingen in de leerplichtige leeftijd."* Jaap Vedder, voorzitter van de *Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-wiskundeonderwijs* (Nvorwo) stelde: *"Het rekenniveau van leerlingen op de basisschool holt achteruit. We hadden mogen*

*verwachten dat na de vele aandacht voor het rekenonderwijs het niveau op alle fronten vooruit zou zijn gegaan. Er moet dringend iets gebeuren"* (*De Volkskrant*, 3. 04.06).

#### 1.2 Mislukking 'realistisch rekenen' en FI

*"De invoering van het realistisch wiskundeonderwijs is één van de meest indrukwekkende onderwijsontwikkelingen van de laatste decennia"*, aldus prof. Fred Korthagen in zijn oratie van 1998. Nauwelijks tien jaar later krijgt het *realistisch en constructivistisch wiskunde-onderwijs* veel kritiek te verduren.

'*Rekenoorlog*', zo luidt de titel van een bijdrage van *Thomas Vanheste* in '*Vrij Nederland*' van 17 mei 2008. We citeren even:

*"Het 'realistische rekenen' is een mislukte poging om het leuk voor de leerlingen te maken, oordelen de critici. Het leren spelen met verschillende methoden (berekingswijzen) brengt louter verwarring, betoogt de Amsterdamse hoogleraar wiskunde Jan van de Craats. Bij elke bewerking hoort maar één methode, die van opa. Welke rampen het realistische rekenen heeft aangericht, blijkt volgens van de Craats glashelder uit de PPON. 'Je schrikt je een ongeluk als je ziet wat 12-jarige kinderen niet kunnen.' Een voorbeeld? 'Ook met een rekenmachine kunnen ze niet uitrekenen hoeveel één strip kost van een strippenkaart van zes euro veertig met vijftien strippen.' En de pabo's en de universiteiten zitten met de brokken. Want het wiskundeniveau van de instromende leerlingen is zo belabberd dat ze het alleen nog maar met bijspijkerkursussen redden."*

Ook een recent in '*Science*' gepubliceerd onderzoek lijkt de klagers gelijk te geven: *leerlingen die wiskundige regels vooral leren aan de hand van concrete voorbeelden zijn minder goed in staat ze in nieuwe situaties toe te passen. Het 'realistische' rekenen werkt dus averechts. Het FI voor de didactiek van de wiskunde geldt als de kwade genius achter de alom ingevoerde methode van het realistische rekenen."* Opvallend is ook dat binnen het 'realistisch rekenonderwijs' van het FI het *leren oplossen van problemen* centraal staat en dat de 12-jarigen precies voor vraagstukken vrij zwak scoren.

### 1.3 Freudenthalers bevestigen mislukking

Als reactie op de kritiek op het FI stellen de Freudenthalers zich eerder defensief op. Ze pakken niet langer uit met de vele zegeningen van hun realistische aanpak, maar de kritiek wordt geridiculiseerd en/of afgewezen (zie punt 5). In het redactioneel van 'Volgens Bartjens' van januari 2008 fulmineerde ook hoofdredactrice Marjolein Kool tegen de critici, maar ze gaf wel toe dat er veel te weinig aandacht is voor inoefenen en parate kennis. Zonder voldoende parate kennis kan een leerling ook moeilijk nieuwe inzichten verwerven en problemen oplossen.

In zijn oratie van 2001 poneerde FI-kopstuk Gravemeijer nog zegevierend: *"We beschikken over uitgebalanceerde leergangen die geleid heruitvinden van de wiskunde mogelijk maken en die breed uitgewerkt zijn in methoden die breed zijn ingevoerd in het basisonderwijs."* In zijn verweer tegen de critici beweerde Gravemeijer eind 2007 echter dat de FI-aanpak niet is doorgedrongen in de praktijk: *"Er heeft nooit een op de vernieuwing toegesneden nascholing van leraren plaatsgevonden. De didactiek die bij de FI- vernieuwing past, is daardoor niet goed uit de verf gekomen. In plaats daarvan laten leraren zich in belangrijke mate leiden door de rekenmethode. Deels in reactie daarop zijn er steeds meer verfijningen in de leergangen aangebracht en zijn de leerstapjes binnen methoden zo klein geworden dat leerlingen zelden voor echte problemen komen te staan. Als gevolg hiervan kan het rekenonderwijs worden getypeerd als weinig uitdagend, niet echt interactief en meer gericht op het aanleren van procedures dan begrijpen"* (Reken-wiskundeonderwijs anno 2007 – tussen oude waarden en nieuwe uitdagingen. Panama-Post, winter 2007).

Als je 'realistisch rekenproduct' na 37 jaar nog niet aanslaat, dan moet je als expertisecentrum – met 70 medewerkers – hieruit de nodige conclusies trekken. Gravemeijer pleit echter voor een sprong vooruit, een totale constructivistische breuk met het klassieke wiskundeonderwijs dat als gevolg van de informatisering en globalisering compleet overbodig zou zijn. We zijn het eens met de stelling dat de implementatie van de FI-aanpak niet vlot verliep. Dat komt vooral omdat de 'realistische' methodiek in de praktijk moeilijk uitvoerbaar is, weinig succesvol is en op weerstand stuit. Dat verklaart ook waarom de FI-aanpak in de recentste rekenmethodes al op de terugtocht is; maar intussen zijn de beproefde waren in de vergeethoek geraakt.

Een ander FI-kopstuk, Kees Buys, bekende op 28 mei j.l. in zijn proefschrift dat het FI tot nog toe geen succesvolle leergangen voor belangrijke onderdelen ontwikkeld heeft: *"Tot op heden is het ons nog niet goed gelukt om een succesvolle leergang rond meercijferig vermenigvuldigen te ontwikkelen die aansluit bij de eigen informele ideeën en strategieën van leerlingen en waarin deze strategieën gaandeweg worden uitgebouwd tot efficiënte hoofdrekenstrategieën. De onderwijsresultaten vertonen zelfs een duidelijk neerwaartse tendens"* (Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen, FI).

Na 37 jaar FI is er nog geen succesvolle aanpak. Toch stelt Buys het *constructivistisch* basisprincipe – het centraal stellen van eigen en informele berekeningswijzen – niet in vraag. Hij brengt in zijn nieuwe leergang wel wat meer structuur aan – in de richting van de klassieke aanpak van het vermenigvuldigen. Het blijft o.i. nog steeds een te omslachtige en verwarrende benadering die een leerkracht in een klas met 20 leerlingen niet eens kan toepassen. Niet enkel voor vermenigvuldigen, maar voor de meeste onderwerpen heeft het FI nog geen duidelijke en succesvolle leergangen opgesteld. Dit blijkt o.a. ook uit het feit dat het FI-alternatief voor het cijferen in de methoden totaal verschillend wordt uitgewerkt en dat leerlingen die die aanpak toepassen veel zwakker scoren dan zij die het nog het klassiek cijferen.

### 1.4 Kritiek in voortgezet onderwijs

In deze *Onderwijskrant* concentreren we ons op de situatie in het basisonderwijs. Er komt echter minstens even veel kritiek vanuit het voortgezet en hoger onderwijs. De leuke FI-wiskunde besteedt volgens velen te weinig aandacht aan de wiskunde als cultuurproduct en aan de meer abstracte elementen, en te veel aan 'fuzzy maths'. Tienduizend studenten wiskunde, natuurkunde en informatica schreven de brief 'Lieve Maria. We zijn boos' aan de vorige minister. Ze protesteerden omdat ze in het voortgezet onderwijs onvoldoende bagage meekregen. Uit een recent onderzoek bleek ook dat veel verpleegkundigen fouten maken omdat ze het elementaire rekenen niet beheersen. Op haar website analyseert Liesbeth van der Plas-Eskes de achteruitgang van het wiskundeonderwijs. Uit een vergelijking met vroeger blijkt ook dat de verwachtingen destijds veel hoger lagen (*Een kleine analyse van het wiskundeonderwijs binnen twee generaties*).

Staatssecretaris van Bijsterveldt volgde in april j.l. bij de opstelling van richtlijnen voor de examen-

programma's wiskunde havo-vwo grotendeels de visie van de *Resonansgroep* (o.l.v. prof. Jan van de Craats). De kern van degelijk onderwijs is opnieuw *het algebraïsch en analytisch rekenwerk* met veel aandacht voor de rekenvaardigheid. De invloed van de FI-wiskunde en de 'realistische contexten' wordt beperkt. De sympathisanten van 'realistische' wiskunde reageerden met het manifest '*Stop de afbraak van het wiskundeonderwijs*'. FI-directeur Jan van Maanen reageerde verbolgen: '*Wij keuren alle besluiten van de minister af. Het is onmogelijk geworden nog innovatief wiskundeonderwijs te creëren.*'

De wiskunde-oorlog situeert zich dus evenzeer op het niveau van het secundair onderwijs. Henk Klomp omschreef op 30 mei 2008 de kritiek vanwege de critici en de *Resonansgroep* als volgt: "*Sinds de invoering van realistisch wiskundeonderwijs in 1985 is het aantal scholieren dat bèta kiest, achteruit gehold met zeven procent per jaar. Tegenwoordig kiest van alle vwo-(=aso)gediplomeerden nog maar één op de zes een bètastudie in het hoger onderwijs. ... Elk sommetje is gerelateerd aan een praktisch probleem. Dat is leuk, maar het conceptuele wordt daardoor naar de achtergrond verdrongen, zodat niemand meer echte wiskunde kan leren. Het doel van het wiskundeonderwijs is het leren beheersen van de taal van de wiskunde en het zinvol leren inzetten van de instrumenten van de wiskunde. De kracht van de wiskunde ligt namelijk juist in de abstractie, in de inzetbaarheid van dezelfde instrumenten in de meest uiteenlopende toepassingsgebieden. Het is goed wanneer ook de kracht van de wiskunde getoond wordt in toepassingen. Dat moeten dan echter wel zinvolle toepassingen zijn waarin kritische modelvorming en functioneel gebruik van het wiskundige instrumentarium centraal staan. Maar opgaven die zijn opgebouwd rond gekunstelde contexten, of vraagstukken waarbij de oorspronkelijke zinvolle context door oversimplificaties krachteloos gemaakt is, zijn contraproductief en schadelijk. Ze geven een verkeerd beeld van de manier waarop wiskunde in de beroepspraktijk, in het onderzoek en in het vervolgonderwijs wordt gebruikt.*" ( H. Klomp, *Realistische wiskunde belemmert het jonge bètatalent*, *Technisch Weekblad*.)

Een lerares wiskunde getuigt: "*Er kwam een omslag in het wiskundeonderwijs, Wiskunde werd een veredelde vorm van tekstverklaring*". Al tien jaar geleden bestempelde de Nijmeegse professor Frans Keune de 'realistische wiskunde' als *pannenkoek-wiskunde*. Hij verweet de Freudenthalers dat de leerlingen een belabberd wiskundig inzicht hebben. Ook prof. Henk Visser formuleerde veel kritiek.

## 1.5 Betrokkenheid en relevantie Vlaanderen

Op 18 januari 2007 deed *prof. Jan van de Craats* een poging om een debat over het wiskundeonderwijs en de FI-aanpak aan te wakkeren met een lezing onder de titel '*Mythen in de rekendidactiek*' op de 25ste Panamaconferentie. Het zag er toen nog niet naar uit dat dit alles enkele maanden later zo'n grote polemiek en instemming zou uitlokken. Toen we merkten dat de Freudenthalers de kritiek ridiculiseerden, stuurden we hem een samenvatting van de veelzijdige kritiek die we al bijna 20 jaar formuleren. In februari 2008 verscheen deze samenvatting op de website van BON en van prof. *van de Craats*. Die samenvatting werd gretig gelezen (een 2000 x op BON-website) en we ontvingen veel enthousiaste reacties. We merken overigens dat onze visie overeenstemt met de recente richtlijnen die we aantreffen in '*Foundations for succes*', *het Final report of the 'National mathematics advisory panel'* van maart 2008 (zie volgende bijdrage). We stellen eveneens vast dat de Amerikaanse NCTM (de Nationale Raad van Leraren Wiskunde) die in 1989 de vage en constructivistische 'Standards' opstelde, in 2006 de *Curriculum Focal Point* publiceerde met de de belangrijkste leerstofpunten per leerjaar. Hierin krijgen de traditionele wiskundeonderwerpen in de rekenkunde, meetkunde en algebra en de rekenvaardigheid weer meer aandacht.

De math-wars in Nederland en de VS zijn o.i. ook verhelderend voor het debat in Vlaanderen – uit het verleden en heden. Ze bevestigen dat het de moeite loonde om vanaf de late jaren tachtig afstand te nemen van het realistisch wiskundeonderwijs en van de constructivistische VS-maths. We vreesden dat het extreem van de moderne wiskunde zou vervangen worden door het extreem van de constructivistische wiskunde. Ook door onze betrokkenheid bij het opstellen van de eindtermen en leerplannen (basisonderwijs) konden we een nieuwe math-war in het basisonderwijs voorkomen. De DVO (nu Entiteit curriculum) verwoordde onlangs dat ze bij de herziening van de eindtermen nog sterker de constructivistische en competentiegerichte toer op wil.

We wezen vanaf 1987 op het problematisch karakter van de constructivistische benadering van Freudenthal en van de Amerikaanse 'Standards', die nu in Nederland volop aan de oppervlakte komen. Die waarschuwingen werden door de FI-sympathisanten veelal genegeerd. *Prof. Van de Craats schreef ons: "Ik ben blij dat Vlaanderen nog niet ten prooi is gevallen aan deze wiskunde-ellende, ongetwijfeld*

*mede dankzij uw inspanningen!”* Ook op het congres van de *Vlaamse Vereniging voor WiskundeLeerkrachten* (Blankenberge 30.06.08) wees hij hierop. Op pagina 29 e.v. beschrijven we hoe we ons bij het opstellen van de eindtermen en leerplannen gewerd hebben om de constructivistische/realistische aanpak in te dammen.

Voor het basisonderwijs hebben we de strijd tegen het constructivisme en andere extreme opvattingen grotendeels gewonnen. Omtrent de toestand in ons secundair onderwijs en de invoering straks van een nieuw en lichter leerplan, bestaat er meer controverse. Begin mei 2008 poneerde *prof. Alfred Warrinnier* in een radioprogramma dat ons secundair onderwijs zich na de vergissing van de ‘moderne wiskunde’ in 1968, nu al te sterk inspireert op de ‘Fuzzy maths’ uit de VS.

In het ontwerp leerplan wiskunde 2009 (VVKSO) merken we dat het voor aso-leerlingen weer een stuk lichter wordt. In de methodische aanwijzingen staan de constructivistische refreintjes centraler dan ooit. In de toelichting lezen we: *“De constructivistische leeropvatting stelt dat kennis beter actief geconstrueerd wordt door de lerende. Kennis kan niet zomaar passief overgedragen worden. Het gaat om een proces van structureren en generaliseren van de eigen ervaringen. Wiskundevorming biedt meer dan een voltooid bouwwerk van objectieve, abstracte, formele kennis. Steeds meer mensen kunnen wiskunde toepassen, ook als ze niet beschikken over de nodige vaardigheid in de rekenalgoritmen. Het gebruik van ICT werkt tijdsbesparend. ...”*

Analoge refreintjes vielen te beluisteren op een DVO-studiedag van 2004. We hebben de indruk dat de leerplanontwerpers niet op de hoogte zijn van de controverse in Nederland en elders. De geciteerde uitspraken wijken sterk af van deze van de *Nederlandse Resonansgroep* en van deze van het al geciteerde *‘National mathematics advisory panel’*. In een bijdrage verderop in dit nummer gaan we in op de situatie in het s.o. en vooral op het nieuwe leerplan.

## **2 Overheid grijpt in: dure hersteloperatie**

### **2.1 Ministers luiden alarmbel**

Ook de Nederlandse beleids mensen zijn er al een tijdje van overtuigd dat het niveau al te sterk is gedaald en dat er dringend ingegrepen moet worden. Staatsecretaris Dijkma nodigde in oktober 2007 in allerijl de Canadese onderwijskundige *M. Fullan* uit om zich te buigen over het lage peil van het reken- en

leesonderwijs – en dit in een land waar voor rekenen en lezen omvangrijke expertisecentra bestaan. Op zich was dit al een blaam voor de vele wiskunde-experten van het Freudenthal Instituut (FI) dat zich nu al sinds 1971 ontfermt over het wiskunde-onderwijs en van het Expertisecentrum Nederlands.

Ook minister Plasterk stelde begin september 2007 een expertgroep aan die maar eens moest uitzoeken waar de problemen zitten. De expertgroep publiceerde het ‘Rapport Meyerinck’ waarin gewezen wordt op de achteruitgang van het wiskundeonderwijs op alle niveaus en waarin maatstaven (eindtermen) per niveau uitgestippeld worden. De overheid dient prioriteit te geven aan basiskennis en basisvaardigheden voor taal en rekenen en te investeren in de noodzakelijke voorwaarden (scholing, tijd en middelen) om een substantiële niveauperhoging te bereiken.

De Nederlandse professor *Bas Braams* die in de VS van nabij het wiskundeonderwijs volgt, vindt het rapport Meyerinck wel belangrijk, maar stelt o.i. terecht dat de commissie nog met te lage normen uitpakt. Hij vergelijkt met de leerplannen en methodes in de Californische scholen. Californië is de staat waarin afstand genomen werd van de constructivistische aanpak van de *Standards*. Het niveau dat kinderen aan het einde van de basisschool volgens Meijerink moeten halen, wordt door de Californische leerlingen al in het vierde leerjaar gehaald. Ook de Vlaamse eindtermen liggen een stuk hoger dan de eindtermen van de commissie Meyerinck.

### **2.2 Hersteloperatie & financiële injectie**

Leerlingen moeten absoluut een hoger niveau halen met rekenen (en taal), vindt het kabinet. Dat is de kern van een veelomvattend plan dat de drie bewindslieden van het ministerie van onderwijs op maandag 21 april presenteerden. Over twee jaar moet al te merken zijn dat de prestaties van leerlingen in basis-, voortgezet en middelbaar beroepsonderwijs verbeteren. Minister Plasterk en de staatssecretarissen Van Bijsterveldt en Dijkma willen dat o.m. bereiken door precies vast te leggen wat leerlingen in de loop van hun onderwijs carrière moeten kennen en kunnen. De ministers zullen de komende drie jaar ruim 115 miljoen investeren om het reken- en taalniveau van leerlingen te verhogen. Vanaf 2011 volgt jaarlijks een bedrag van circa 15 miljoen. Landelijk wordt in overleg met leraren vastgesteld wat leerlingen van rekenen en taal moeten kennen en kunnen bij de overgang naar een volgend schooltype. Of leerlingen voldoen aan het vereiste taal- en rekenniveau wordt tijdens de

schoolloopbaan tussentijds of via examens getoetst. De lerarenopleidingen moeten gezamenlijke eindtermen vaststellen en de toekomstige onderwijzers krijgen een centrale eindtoets.

### 2.3 Inspiratie vanuit Vlaanderen?

We raden Nederland aan om niet enkel te werken met duidelijke *eindtermen* lager onderwijs e.d., maar ook met leerplannen waarin de leerlijnen per leerjaar uitgestippeld zijn – net zoals in Vlaanderen. Het volstaat geenszins om vast te leggen wat de leerlingen op het einde van het zesde leerjaar basisonderwijs of vierde jaar s.o. moeten kennen. Er is nog meer nood aan doelstellingen per leerjaar (soms graad). Als inspiratiebron stuurden we ons Vlaams leerplan basisonderwijs naar Van de Craats e.a.

*Jan van de Craats* stelde in de media dat men zich bij de hersteloperatie mede kon inspireren op het Vlaamse leerplan en de Vlaamse leerboeken voor het basisonderwijs. Dat leidde tot de uitspraak in *De Telegraaf* van 12.02.2008 dat Nederland beter de Vlaamse methodes kon overnemen. En op de BON-website schreef de wiskundige 25.12.1945: *“Er is een makkelijke oplossing uit het rekendrama. Maak gebruik van de (bewezen) traditionele didactiek. Gebruik boekjes uit Vlaanderen. De klassieke didactiek is voor leerkrachten ook eenvoudiger dan de didactiek van het realistisch rekenen.”* Een probleem is uiteraard dat een lange en stevige traditie doorbroken is en dat terugkeren naar het juiste pad dan heel moeilijk wordt. De jongere leerkrachten leerden tijdens hun opleiding die klassieke aanpak niet meer kennen. Ze zijn wijsgemaakt dat de ‘beproefde waarden’ waardeloos en geestdodend waren. We merken ook in Vlaanderen dat het na de ‘New Math’-periode voor de leerkrachten niet zo makkelijk was/is om de weggedeelde aanpakken weer in de vingers te krijgen.

## 3 Drie basiskritieken op FI-aanpak

### 3.1 Afwijzing beproefde waarden

FI-kopstuk Koeno Gravemeijer stelde eind 2007 nog dat de klassieke wiskunde als gevolg van de informatisering en globalisering compleet had afgedaan (zie punt 1.3). Uit een onderzoek van maart 2007 was nochtans gebleken dat een groot deel van de verpleegkundigen misrekenen bij de toediening van medicatie omdat ze te weinig elementaire rekenkennis en rekenvaardigheid bezitten (C.W. de Jong & A.P. Koster, *Rekenvaardigheid van verpleegkundigen*,

Groningen, 2007). Slechts 7 procent berekende foutloos opgaven over omzettingen van gewichten en inhoudsmaten. Bijna de helft van de onderzochte groep konden geen correcte berekening van een vochtbalans maken. De meeste verpleegkundigen hadden ook moeite met opgaven op het gebied van medicatiedosering, infuussnelheid en zuurstoftoediening. Opvallend was verder dat de 50-plus-sers opvallend beter scoorden dan hun jongere collega’s. *“Dat heeft te maken met het feit dat de oudere verpleegkundigen nog hebben leren rekenen. Jongeren leren dit niet meer goed op school”*, stelde *Borgers*. De onderzoekers pleiten ervoor om het trainen van de elementaire rekenvaardigheid – met inbegrip van de regel van drieën – op te nemen in de opleiding verpleegkunde. In veel opleidingen is dit nu al het geval.

In zijn oratie van 2001 illustreerde Gravemeijer dat de klassieke *rekenvaardigheid* haar toepasbaarheid verloren had, precies aan de hand van het beroep van de verpleegkundige. Volgens hem gebruiken verpleegkundigen bij een probleemopgave niet zomaar een bestaand berekenmodel, maar ze ontwerpen een eigen mathematisch model om tot een oplossing te komen. *“Dit vergt andere kennis dan het model kunnen doorrekenen. Een verpleegkundige hoeft niet te kunnen doorrekenen wat een computer kan. De informatisering van de maatschappij leidt ertoe dat een groter beroep zal gedaan worden op modelleren en redeneren”*. En als reactie op de recente kritiek repliceerde Gravemeijer onlangs: *“Het type rekenonderwijs dat de critici propageren heeft enkel nut in een tijd waarin je nog veel met pen en papier moest uitrekenen. Inmiddels heeft de rekenmachine dit rekenwerk overgenomen. Mechanische rekenvaardigheid heeft zijn maatschappelijke functionaliteit verloren. Het gevolg is dat wat op de basisschool geleerd is daarna niet meer beoefend wordt, waardoor het geleerde erodeert”* (Website Volgens *Bartjens*, 01-10-2007). Hiermee zocht Gravemeijer ook een uitvlucht voor het feit dat veel scholieren en jongvolwassenen niet meer rekenvaardig zijn.

Ook *W. Oonk van het FI* pakte onlangs uit met een karikatuur van de klassieke rekendidactiek en met het verlossende alternatief: *“Inzicht geven vond men vroeger onnodig en zonde van de tijd. De leerlingen moesten zo snel en zo goed mogelijk leren rekenen voor het leven van alledag.”* Vanaf 1971 werkte het FI volgens *Oonk* aan een totale ommekeer. Volgens hem heeft Hans Ter Heege b.v. vastgesteld dat *“kinderen op eigen kracht een adequaat netwerk moeten kunnen opbouwen voor basisproducten. De oplossingen die ‘het kind zelf uitvindt’ blijken beter*

en diepgaander begrepen te worden dan oplossingen die worden overgenomen van leraren. (Kenmerken van een vakdidactische theorie, Panama-Post, herfst 2007, p. 23).

De voorstanders van de *realistische en constructivistische* aanpak begingen precies dezelfde fouten als de voorstanders van de 'moderne wiskunde' destijds. Ze plaatsten de beproefde waarden in de verdomhoek. De 'hemelse' (te formele) *New Math* werd vervangen door de 'aardse', contextgebonden en constructivistische aanpak die al te weinig aandacht heeft voor rekenvaardigheid en parate kennis, voor veralgemening en abstrahering en voor wiskunde als cultuurproduct. De zelfstandige constructie van eigen kennis en berekeningswijzen vanuit contexten en het leren *problemen oplossen* werden de kern van de nieuwe aanpak. De 'realistische' aanpak blijft te veel steken in het stadium van de voor-wiskunde en remt het vlot berekenen af. De leerlingen blijven steken in *dagdagelijkse* en *aardse* rekencontexten en verkennen te weinig de zondagse, abstracte en vakdidactische regionen. De Freudenthalers denken ten onrechte dat het creëren van betekenisvolle situaties niet gelinkt kan worden aan de inhoud en structuur van de wiskunde als *vakdiscipline*. Zowel de voorstanders van de 'New Math' als van de 'Constructivist Math' beweerden ten onrechte dat het klassieke rekenonderwijs op lemen voeten berustte en totaal voorbijgestreefd was.

Zelf pleiten we al dertig jaar voor een herwaardering van de beproefde inhoudelijke waarden en oerdegelijke leerprincipes. Het al vermelde *'National Panel'* in de VS deed dit ook in maart 2008. De Freudenthalers hingen na 1980 een karikatuur op van het klassieke rekenen dat ze voortaan als mechanistisch en geestdodend bestempelden – net zoals de voorstanders van de 'moderne wiskunde' dit deden rond 1970. Het nieuwe FI-rekenen verwaarloosde in het basisonderwijs tal van beproefde waarden: het automatiseren en memoriseren van sommen en tafels, het 'gestandaardiseerd' hoofdrekenen en cijferen, het inoefenen van het klassieke *metend rekenen*, het traditionele vraagstukkenonderwijs ... Gert Gelderblom (CPS) schreef onlangs nog: "*Sinds realistische reken-wiskunde-methoden het onderwijs hebben veroverd, is het gericht oefenen en automatiseren van basisvaardigheden ernstig verwaarloosd*" (*Basischool-Management*, april 2007, p. 3). Gelderblom verwees ook naar een bijdrage hierover in *Onderwijskrant*. Ook voor het voortgezet onderwijs toonde het FI weinig respect voor de klassieke waarden en voor alles wat naar abstractie rook.

In onze visie en in deze van het *'National panel'* is het zo dat parate kennis en het vlot en gestandaardiseerd berekenen (= mechanistisch aspect), het inzichtelijk werken en het leren oplossen van vraagstukken drie invalshoeken zijn die elkaar onderling ondersteunen en versterken. En hoe jonger de leerlingen zijn, hoe belangrijker het leren vlot (geautomatiseerd) berekenen is. Het *'National Panel'* stelt: "*Procedural skills (e.g. the standard algorithms) and conceptual knowledge are mutually supportive, each facilitating learning of the others. Conceptual understanding of mathematical operations, fluent execution of procedures, and fast access to number combinations together support effective and efficient problem solving.*" Het gaat om een drie-eenheid en om tweerichtingsverkeer, van kennen naar kunnen, maar evenzeer van kunnen naar kennen. In 1935 gewaagde de Vlaamse vakdidacticus Deckers van een combinatie van transpiratie (oefenen) en inspiratie (inzicht).

We gaan er verder ook van uit dat wiskunde als (vak)discipline een cultuurproduct is dat cultuur-overdracht vereist. Wiskunde is niet een product dat de leerling zoveel mogelijk zelfstandig moet (re)construeren (zie 3.2). De Freudenthalers houden verder te weinig rekening met de wetmatigheden van het cognitief functioneren. Klassieke leerprincipes als progressief compliceren, inoefenen en vastzetten van de kennis worden zomaar opzijgeschoven. Kennis en vaardigheden worden te weinig stapsgewijs opgebouwd en te weinig opgeslagen in het langetermijn-geheugen. De leerlingen hebben het dan ook moeilijk om zonder stevige verankerpunten nieuwe kennis en vaardigheden te verwerven en vraagstukken op te lossen (zie 3.3).

### 3.2 Negatie wiskunde als cultuurproduct

Ook nog begin 2007 pakte FI-kopstuk Koeno Gravemeijer uit met de *constructivistische* aanpak van het leerproces. Hij schreef: "*De grondslag van de FI-aanpak wordt gevormd door het socio-constructivistische uitgangspunt dat de leerlingen hun eigen kennis construeren en dat de beïnvloeding hiervan door het onderwijs slechts indirect kan plaatsvinden. ... Via eigen activiteit ontwikkelt de leerling zelf wiskunde*" (K. Gravemeijer en P. Cobb, *Ontwikkelingsonderzoek als methode voor onderzoek rond innovatieve leer-gangen*, 2007, *Pedagogische Studiën*, (84), pag. 331).

In 1987 – twintig jaar geleden – formuleerden we al onze basiskritiek op de *constructivistische* visie van Freudenthal. Na correspondentie met de Gentse



prof. Leo Apostel over het constructivisme en de FI-aanpak stelden we samen met Apostel dat de visie van Freudenthal geen volwaardig alternatief bood voor de 'moderne wiskunde'. Freudenthal en co zagen het wiskunde-leren o.i. al te eenzijdig als een constructie van individuele leerlingen en al te weinig als verwerving van een cultuurproduct, gericht op economischer en efficiënter handelen. Freudenthal en zijn medewerkers onderschatten het socio-cultureel karakter van de wiskunde als vakdiscipline, het aspect 'cultuuroverdracht' en de maatschappelijke en economische waarde (Raf Feys, 'Nationaal plan voor het wiskunde onderwijs', *Onderwijskrant* nr. 48, juli 1987). Ook het 'National Panel' in de VS vroeg recentelijk meer waardering voor de wiskunde als cultuurproduct en vakdiscipline.

### 3.3 FI-aanpak haaks op cognitief functioneren

Twee courante kritieken luiden dat de FI-aanpak veel te moeilijk en omslachtig uitvalt voor de leerlingen en weinig aandacht besteedt aan het vastzetten (beklijven) van het geleerde, aan de parate kennis. De Freudenthalers en de constructivisten houden weinig rekening met de wetmatigheden van het cognitief functioneren. Mede gezien de beperkingen van het werkgeheugen is het b.v. belangrijk dat de leerling bij nieuwe of moeilijkere opgaven een beroep kan doen op een breed arsenaal van geautomatiseerde vaardigheden en parate kennis, die opgeslagen zijn in het lange-termijn-geheugen. Het didactisch principe van de *progressieve complicering* is hierbij een oerdegelijk principe. Het houdt in dat men stap voor stap verder bouwt op kennis en (deel)vaardigheden die al opgeslagen zijn en aldus voorkomt dat de leerling met te veel nieuwe zaken ineens geconfronteerd wordt. Overbelasting van het werkgeheugen moet voorkomen worden.

De 'realistische' theorie houdt geen rekening met de cognitieve architectuur en met de geheugenbelastingstheorie (John Sweller) en vindt ook *progressieve complicering* uit den boze. Bij de open, context- en probleemgestuurde leerprocessen à la FI worden de leerlingen met te veel nieuwe zaken tegelijk geconfronteerd en kunnen ze te weinig aansluiting vinden bij (deel)vaardigheden en basis-kennis die al verworven moet zijn en opgeslagen in het lange-termijngeheugen. Bij het constructivistische probleemoplossend leren wordt het werkgeheugen grotendeels in beslag genomen om wildweg naar bruikbare informatie te zoeken voor de probleemoplossing. Het werkgeheugen wordt niet gericht op het grotendeels gebruik maken van opgeslagen

kennis. Het doel van effectieve instructie bestaat er niet in de leerlingen lange tijd te laten zoeken naar informatie of ze die zelf te laten ontdekken. Het bestaat er vooral in de leerlingen specifieke leiding te geven in functie van het leren cognitief manipuleren van informatie in functie van het leerdoel. Het is verder ook de bedoeling dat het resultaat ook stevig wordt opgeslagen in het lange-termijn-geheugen. Aan het vastzetten en inoefenen besteedt de FI-aanpak veel te weinig aandacht.

In ons boek *'Rekenen tot honderd'* (Wolters-Plantyn 1998) wijzen we in dit verband op het opsplitsen van vaardigheden in deelvaardigheden en op het belang van het vastzetten van de verworven kennis of (deel)vaardigheden in het lange-termijn-geheugen. Indien de fundamentele van de cognitieve architectuur van het brein niet degelijk zijn, dan wordt ook het verwerven van nieuwe kennis en vaardigheden en het oplossen van vraagstukken heel moeilijk. Dat leerlingen met de FI-aanpak over weinig parate kennis beschikken, maar des te meer over inzicht en probleemoplossend vermogen, klinkt ongeloofwaardig. Uit de PPO-ondersoek blijkt dat ze ook veel last hebben met het oplossen van vraagstukken.

We besteden in de klassieke rekendidactiek dan ook veel aandacht aan alles wat te maken heeft met het complexe proces van automatiseren en memoriseren. Als 'realisten' als *Marjolein Kool* nu bekennen dat het automatiseren en oefenen inderdaad wordt verwaarloosd, dan wijst dit er op dat de *realistische aanpak* onvoldoende leerpsychologisch is doorzacht. In tal van onderzoeken werd verder duidelijk dat zwakkere leerlingen nog het meest de dupe zijn van de realistische aanpak. In de publicatie *'Jonge kinderen leren rekenen' van het Tal-team* gaf ook FI-directeur *Adri Treffers* in 1999 *tussen de lijnen door* deze fout toe. Hij bekende: "Aanvankelijk was het realistisch rekenonderwijs niet geneigd om het oefenen een prominente plaats te geven. Maar inmiddels is het tij gekeerd: oefenen staat nu weer duidelijk in het didactische blikveld" (p. 56). Jammer genoeg worden in de Tal-publicatie de basisprincipes inzake automatiseren en memoriseren niet uitgewerkt. Er wordt ook niet vermeld dat automatisering gebaseerd is op korte en gestandaardiseerde berekeningswijzen en op een opbouw via progressieve complicering, twee basisvoorwaarden die haaks staan op de realistische aanpak. Met de overbeklemtoning van 'gevarieerd' rekenen wordt ook in die Tal-publicatie nog steeds veel verwarring gesticht. En jammer genoeg waren de realistische methodes van de 2<sup>de</sup> generatie in 1999 al op de markt en werd die fout de

erop volgende jaren ook niet expliciet meer erkend. De Freudenthalers pakten achteraf wel uit met zgn. 'productief oefenen' ter vervanging van het klassieke oefenen, maar dit zogenaamd 'productief oefenen' is niet voldoende productief.

In 'Rekenen tot honderd' leggen we ook uit wat er leerpsychologisch schort aan de FI-aanpak inzake de *aanschouwelijke ondersteuning van berekeningen*. De Freudenthalers laten de leerlingen b.v. veel te lang berekeningen maken op het rekenrek tot 20 en op de 100-getallenlijn. Hierdoor wordt de verinnerlijking afgeremd en fungeren rekenrek en getallenlijn als een soort uitrekenmachine. En door het feit dat de Freudenthalers niet expliciet aansturen op een korte en gestandaardiseerde berekening is de overschakeling op louter 'mentaal' berekenen heel moeilijk. In het recente proefschrift van Kees Buys (zie 1.3) blijkt opnieuw dat de leerlingen verstrikt geraken in de omslachtige schematiseringen.

### 3.4 Samenvatting basiskritiek

De kritiek op het FI en op de Amerikaanse Standards (1989) slaat dus vooreerst op de minachting en verwaarlozing van de beproefde waarden en van de wiskunde als cultuurproduct en vakdiscipline. Veel critici menen dat het wiskundeonderwijs op een sterke traditie kan bogen en betreuren dat de FI-hervormers hier geen waardering voor tonen en pronken met polariseringen tussen realistisch en mechanistisch rekenen, tussen leren problemen oplossen en het aanleren van de vakdisciplinaire inhoud ... FI-directeur *Jan van Manen* toont in zijn reactie op de kritiek dat er binnen het FI nog steeds weinig waardering is voor de beproefde waarden. Hij fantaseert: *"Vroeger beschikten leerlingen slechts over een beperkt standaardrepertoire. Dat had echt iets geestdodends. De nieuwe aanpak biedt ruimte aan de creativiteit van de jongeren. Nu raadplegen ze me zelfs over wiskundige vragen die tien of twintig jaar geleden absoluut niet naar boven kwamen"* (De Telegraaf, 13.02.08). Ook FI-medewerker *Willem Vermeulen* beweert (o.c.): *"De noodzakelijke attitude van handig en kritisch zoeken en selecteren maakt dat onze jongeren andere feiten kennen en andere vaardigheden ontwikkelen dan oudere generaties. De jeugd gaat minder slaafs met informatie om, juist omdat er zo veel en zo veel verschillende informatie snel beschikbaar is."* Van Manen en co hanteren nagenoeg dezelfde argumenten: *de veranderde maatschappij vereiste een totaal ander soort wiskundeonderwijs.*

Onze kritiek slaat ook op het feit dat de realistische theorie op tal van vlakken in strijd is met de werking van de cognitieve architectuur van het brein en bijvoorbeeld geen rekening houdt met de geheugenbelastingstheorie en de theorie in verband met automatiseren en memoriseren.

In 1995 vatte de Leuvense prof. *Lieven Verschaffel* de kritiek van Feys (1990) e.a. op de FI-aanpak als volgt samen: *"Zo zou de realistische aanpak: \*onvoldoende aandacht besteden aan het inoefenen en consolideren van elementaire rekenfeiten en -vaardigheden; \*een te negatief beeld ophangen van kennis die men aangereikt krijgt zonder het allemaal zelf uit te vinden; \*al te sterk vertrouwen op de natuurlijke constructies en inventies van leerlingen en hen al te veel vrijheid schenken bij het kiezen en gebruiken van modellen"* (in: *Verschaffel L. e.a., Naar een nieuwe reken/wiskundendidactiek voor de basisschool en de basiseducatie, deel 1, Acco, 1995.*) In onze bijdragen in deze STOHO-publicatie komt duidelijk tot uiting dat we afstand namen van de FI-filosofie en van de 'realistische' bijdragen van Hans Ter Heege en co. De huidige kritiek in Nederland komt in sterke mate overeen met de kritiek die we al 20 jaar formuleren. Zelf betreurden we ook steeds de invoering van vage en rekbare termen als 'realistisch' rekenen en 'gecijferdheid'. In een bijdrage op p. 29 e.v. diepen we onze kritiek op de FI-visie verder uit. We schetsen er ook de kroniek van een aangekondigde malaise.

## 4 FI ridiculiseert en zoekt uitvluchten

In hun reactie op de kritiek minimaliseren en karikaturiseren de Freudenthalers meestal de kritiek op het te lage niveau en op het aandeel van het FI in de malaise. Het zou om vals alarm gaan vanwege enkele snoodaards die het rekenen willen herleiden tot mechanistisch cijferen. Volgens Hans ter Heege – hoofdredacteur 'Panama-Post' – zijn de problemen gewoon het gevolg van het feit dat *"opleiding en nascholing van leraren maar in beperkte mate gelijke tred gehouden hebben met de ontwikkelingen in het vak"*. Volgens hem was de rekenvaardigheid van de leerlingen en de volwassenen voor de komst van het FI lamentabel. Precies daarom zochten de Freudenthalers een nieuwe aanpak. Ook volgens *Treffers* e.a. zijn de leerkrachten te weinig wiskundig opgeleid en/of slagen ze er onvoldoende in om de realistische principes toe te passen. Volgens *Gravemeijer* is het klassieke – en zelfs huidige – wiskundeonderwijs totaal voorbijgestreefd (zie punt 1.3). En volgens hem kan het niveau moeilijk gedaald zijn, aangezien de leerlingen vroeger ook geen niveau haalden: *"Er*

werd dertig jaar geleden veel geïnvesteerd in het oefenen van weetjes en procedures, maar de leerlingen konden hun kennis niet toepassen en nog minder in contextopgaven. In plaats van een staartdeling te maken, kozen ze bijvoorbeeld voor herhaald aftrekken” (Reken-wiskundeonderwijs anno 2007 – tussen oude waarden en nieuwe uitdagingen. Panama-Post, 2007).

In ‘Volgens Bartjens’ ridiculiseerde ook hoofdredactrice Marjolein Kool in september 2007 de kritiek: “Hoe moet ons rekenonderwijs er over enkele jaren uitzien? Cijferende kinderen of flexibel rekenende kinderen?” Daarop volgde de peilingsvraag: ‘Moet het handig rekenen afgeschaft worden?’ Lucide lezers repliceerden op de website dat het debat geenszins ging om een keuze tussen hoofdrekenen en cijferen en dat de Freudenthalers de zwakke rekenvaardigheid ten onrechte tot zwakke cijfervaardigheid reduceerden. Op de PPON-vaststelling dat het klassieke cijferen veel betere resultaten oplevert dan het omslachtige FI-alternatief, wordt vaak gereageerd met de stelling dat cijferen niet meer belangrijk is.

Ook FI-medewerker Willem Vermeulen minimaliseerde in maart 2008 de kritiek en het aantal critici: “Het realistisch rekenen ligt ‘de laatste tijd’ onder vuur. In Nederland spreekt onder meer prof. Jan van de Craats zich tegen deze stroming uit, in België Raf Feys, en in kranten verschijnen de laatste tijd verschillende artikelen tegen de realistische aanpak. Volgens critici leidt het realistisch rekenen tot verslechtering van cijfervaardigheden en kennis van de tafels.” (Vermeulen W., Vals alarm, of is er iets aan de hand?, Volgens Bartjens, maart 2008). Vermeulen verwijgt dat ook de meeste beleidsmensen hun vertrouwen in het FI-expertisecentrum verloren hebben. Hij verwijgt ook dat het FI al bijna 20 jaar de veelzijdige kritiek vanwege de Vlaamse lerarenopleiders Feys en Van Biervliet doodzwijgt. Het gaat dus niet louter om recente kritiek en onze kritiek betreft de meeste domeinen en niet louter de verwaarlozing van het klassieke cijferen en de klassieke tafels. Ook in Nederland beluisteren we al vele jaren kritiek vanwege leerkrachten, inspecteurs, orthopedagogen (Ruijssenaers, Van Luit, Danhof, Timmermans ...), professoren wiskunde (Keune), docenten hoger onderwijs, officiële rapporten... We verwijzen ook naar de interessante kritiek die in 1999-2000 opdook in het kader van het tegenvallende PPON-peilingsonderzoek (zie p. 24 e.v.).

Voor de vele vrijgestelden van het expertisecentrum wiskunde van het FI komt de recente kritiek ongelegen.

Dat de minister een jaar geleden een beroep deed op de Canadese onderwijskundige Michael Fullan om een oplossing te zoeken voor de niveaudaling, werd al als een kaakslag ervaren. De voortdurende kritiek in de kranten en in officiële rapporten kwam ongetwijfeld ook hard aan. Enkele jaren geleden kreeg het FI nog veel lof vanwege het ministerie. Nu slaan de ministers alarm en ze pakken uit met een herstelplan. Ze publiceerden ook al nieuwe examen-eisen voor havo-vwo-leerlingen die afwijken van de FI-visie.

In het verleden deden de FI-kopstukken jammer genoeg hun best om onze kritiek te verzwijgen en/of af te wijzen. In 1993 publiceerden we een kritische bijdrage in hun tijdschrift *Panama-Post* onder de sprekende titel ‘Laat het rekenen tot honderd niet in het honderd lopen’. We kregen veel sympathiserende reacties, maar FI-directeur Treffers bestempelde ons meteen als een ‘traditionele realist’ die niet bereid was de constructivistische FI-wending te onderschrijven. Nooit werd nog in een bijdrage verwezen naar onze kritieken en vakdidactische publicaties of naar de goede prestaties van Vlaamse leerlingen op TIMSS of PISA. De Leuvense prof. Lieven Verschaffel werd wel geregeld uitgenodigd om zijn sympathie voor het FI te betuigen.

Nu zijn de Freudenthalers een beetje verrast door de escalatie van de kritiek tijdens de voorbije 2 jaar en door de weerklink van de actie van prof. Jan van de Craats e.a. Ze proberen dan maar de kritiek te ridiculiseren en zoeken allerhande uitvluchten voor de tegenvallende prestaties. Volgens Vermeulen e.a. mogen we de uitslagen van nu niet vergelijken met de uitslagen van vroeger. Volgens Treffers liggen de verwachtingen ten aanzien van de leerlingen te hoog. Als we de PPON-opgaven bekijken, dan krijgen we geenszins de indruk dat dit het geval is – en nog minder als we vergelijken met opgaven in rekenboekjes uit de jaren zestig. Joost Klep (SLO) betwijfelt of we nog wel veel moeten oefenen: “Moeten we nog steeds alles oefenen? En tot welk niveau? Moeten we cijferen überhaupt oefenen? En cijferen? Moeten we nog sommen met maten en metriek stelsel laten oefenen of geven we de kinderen een tabellenboek. En welke vaardigheden beheersen kinderen nog 3 jaar ná het verlaten van de basisschool nog? En zijn de dingen die ze vergeten zijn dan eigenlijk het oefenen wel waard geweest?” Zoals de meeste Freudenthalers beseft Klep niet dat geautomatiseerde kennis die vastgezet is in het lange-termijngeheugen meestal veel langer blijft dan inzicht.

Terloops: we merkten enkele jaren geleden dat Trefers – inmiddels op pensioen – af en toe wat afstand nam van de constructivistische ambities van Gravemeijer en co. Hij gaf in de eerste TAL-publicatie ook toe dat de Freudenthalers het aspect (in)oefenen te veel verwaarloosd hadden. Maar nu er van buitenuit veel kritiek komt, sluiten de FI-gelederen zich weer.

## 5 Aandeel van FI e.a. in malaise

Als wellicht de belangrijkste schuldige voor de achteruitgang van het rekenen wordt het FI met de vinger gewezen. Het FI met zijn 70 vrijgestelden domineert al een paar decennia het wiskundeveld. Als *expertise-centrum* was ook het FI steeds op zoek naar expansie en werk voor de eigen winkel. Vanuit die logica nam het FI al te vlug afstand van de beproefde waarden en werd een constructivistische cultuuromslag gepropageerd – mede als legitimatie voor de grote en blijvende investering. De voorbije 37 jaar ontwikkelde het FI wel leuke ideeën en frisse invalshoeken, maar geen evenwichtige en werkbare visie en nog steeds geen concrete en duidelijke leerplannen zoals we die in Vlaanderen kennen. De recente bekenenis van Kees Buys dat er na 37 jaar nog steeds geen uitgebalanceerde en succesvolle leerjaren voor vermenigvuldigen bestaan (zie punt 1.3), geldt ook voor tal van andere domeinen. We zouden hier kunnen spreken over schuldig verzuim.

In welke mate heeft het FI het wiskundeonderwijs nefast beïnvloed? Volgens velen en volgens het rapport-Dijsselbloem is het totale niveau van het Nederlandse onderwijs de voorbije decennia flink gedaald als gevolg van ontscholingstendenzen *allerhande*. Er was globaal gezien minder aandacht voor de leerprestaties en het peil van de leerkrachten is gedaald. Voor het wiskundeonderwijs heeft het FI volgens velen ook een nefaste invloed gehad, vooral ook op de lerarenopleidingen en op de nieuwe 'realistische' methoden. In de vroege jaren tachtig verschenen voor het basisonderwijs de eerste versies van 'De wereld in getallen', 'Rekenen en wiskunde' ... Enkele jaren later verschenen er al herwerkte versies van de 'realistische' methoden waarin de FI-Invloed al wat verminderde.

Bij het inschatten van de invloed van het FI, maken we ook een onderscheid tussen het FI-gedachtegoed, de realistische methodes en de concrete lespraktijk. In het rapport-Dijsselbloem lezen we dat leerkrachten er vaak in slaagden de schade van nefaste her-

vormingen te beperken. Ervaren leerkrachten zullen niet zomaar alle FI-refreintjes overgenomen hebben. De FI-verwachting dat de leerkracht zou het inspelen op de individuele constructies van elke leerling, was ook niet realiseerbaar. Gravemeijer e.a. stelden in 1993 binnen het 'More-onderzoek' al vast dat lessen met realistische methoden slechts 'beperkt realistisch' waren. Gravemeijer beweerde onlangs – vergoelijkend – dat de realistische FI-aanpak nog steeds de werkvloer niet heeft bereikt en zelfs bijna niet meer aanwezig is in de *realistische* methodes (zie punt 1.3).

De belangrijkste schade betreft o.i. het verwaarlozen van de beproefde waarden waardoor het doorgeven van die traditie door ervaren leerkrachten en lerarenopleiders doorbroken werd. De 'meesters' die de oerdegelijke aanpakken nog in de vingers hebben en kunnen demonstreren, zijn inmiddels met pensioen. Dit is een schade die moeilijk te herstellen is. We stippen nog aan dat niet enkel het FI, maar ook de lerarenopleiders wiskunde, de *Nederlandse Vereniging voor de Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs* (NVORWO), de SLO en het APS, en veel onderwijskundigen heel sterk de realistische aanpak propageerden.

## 6 Correspondentie & samenwerking met Nederlandse critici

We merkten de voorbije maanden dat enkele Nederlandse professoren en rekendidactici ongeveer dezelfde kritiek aan het adres van de FI-aanpak formuleerden als deze die we al vele jaren geleden formuleerden – en dit zonder kennis van onze kritiek. De Freudenthalers wezen alle kritiek af en karikatureerden de klassieke aanpak als '*mechanistisch cijferen*'. Dit alles zette ons aan om te reageren op deze karikatuur en op de reductie van de veelzijdige kritiek. In die context stuurden we o.a. een samenvatting van onze kritiek en een aantal publicaties naar prof. Jan van de Craats en zijn medestanders.

In deze bijdrage vermelden we even wat correspondentie van *prof. van de Craats* hieromtrent. Hij schreef ons begin februari: "*Met veel genoegen las ik uw beide vakdidactische publicaties (Rekenen tot honderd en Meten en metend rekenen) en de bijdrage over cijferen die u me toezond. Deze bundels zijn duidelijk geschreven vanuit de praktijk. Waar u verschillende benaderingen vergelijkt – vooral ook met deze van het FI, komt u steeds tot conclusies die*

*me als buitengewoon verstandig voorkomen. Met plaatsvervangende schaamte zie ik dan weer met welke misschien goedbedoelde, maar voor ervaren mensen uit de onderwijspraktijk duidelijk onzinnige theorieën de Freudenthalers het debat hebben gedomineerd. Zo hebben ze het Nederlandse rekenonderwijs in dertig jaar volledig in de soep laten lopen. Dank ook voor het toezenden van het 'Leerplan wiskunde'. Ook dat heb ik met veel belangstelling gelezen. Dit leerplan is concreet en duidelijk; een verademing naast de vage Nederlandse Kerndoelen.*

*Dank verder voor uw steun in de wiskundecampagne die ik momenteel aan het voeren ben. Ik ben blij in Vlaanderen geestverwanten te hebben ontdekt! Er woedt momenteel in Nederland een hevige strijd tegen de 'nieuwe rekenaars'. Ze hebben in Nederland zo lang hun gang kunnen gaan omdat echte deskundigen niets in de gaten hadden. Ik heb ook pas anderhalf jaar geleden ontdekt welke rampen ze hebben aangericht. Verder stel ik veel prijs op verder contact. Intussen ben ik blij dat Vlaanderen nog niet ten prooi is gevallen aan deze ellende, ongetwijfeld mede dankzij uw inspanningen! De Freudenthalers hebben jammer genoeg uw grondige kritiek en publicaties steeds doodgezwegen. Ik ga er nu voluit tegenin, en uw artikelen en boeken zijn daarbij een grote steun voor me."*

*Van de Craats stuurde op 9 februari een lange brief naar de sympathisanten van zijn Nederlandse rekengroep waarin hij verwijst naar de kritiek van Feys en Van Biervliet en de Nederlanders oproept om zich mede te inspireren op de Vlaamse aanpak. Van de Craats schrijft: "Geachte dames en heren, Raf Feys, pedagoog & reken- en wiskundedidacticus uit Brugge maakte me opmerkzaam op het feit dat men in Vlaanderen al heel lang de ontwikkelingen in Nederland kritisch volgt, en er ook veel aandacht aan besteedt in de didactische vakliteratuur. Zo publiceerde Feys 3 vakdidactische boeken. Ook in de Onderwijskrant, een onafhankelijk tijdschrift waarvan Feys een van de redacteurs is, verschenen er de voorbije 25 jaar veel bijdragen.*

*In september 2000 heeft de Onderwijskrant een speciaal nummer uitgebracht over Constructivisme als leertheorie en constructivistische wiskunde met daarin twee bijdragen van Raf Feys en Pieter van Biervliet die ik u hierbij toestuur. Het gehele themanummer kan ook worden gedownload vanaf de website van de Onderwijskrant. De eerste bijdrage heeft als titel: *Realistisch wiskundeonderwijs: lager peil en**

*constructivistische invloeden.* Dit artikel bespreekt de voor Nederland tegenvallende resultaten van PPON-1997 in het licht van een vergelijking tussen het rekenonderwijs in Nederland en Vlaanderen. Daarbij moet bedacht worden dat Vlaanderen in zowel TIMSS als in PISA 2003 en 2006 de beste prestaties van alle Europese landen levert op het gebied van rekenen en wiskunde.

*Verbijsterend en beschamend vond ik het te lezen hoe arrogant de 'realistische rekenaars' destijds reageerden op ernstige kritiek vanuit Vlaanderen. Bijdragen vanuit Vlaanderen werden achteloos terzijde geschoven. Een citaat: 'We hebben verder de indruk dat in Nederland veel mensen schrik hebben om tegen het wiskunde-establishment in te gaan. Als er al wat kritiek komt, is het meestal vanuit de hoek van de orthodidactici. Nog een pijnlijke anecdoten. Destijds werd in Willem Bartjens de goede score van de Vlaamse leerlingen op het TIMSS-onderzoek weggemoffeld, door te schrijven dat de vijfde plaats (en de beste van Europa) bekleed werd door Wallonië, waar in de TIMSS-tabel duidelijk Belgium Flemish stond. Toen we vroegen om dit in een volgend nummer recht te zetten kregen we als antwoord dat inderdaad Belgium Flemish ten onrechte vertaald werd als Wallonië, maar dat een rechtzetting in Willem Bartjens niet nodig was. De Nederlanders mochten niet weten dat Vlaamse leerlingen goed scoorden en zelfs beter dan hun Nederlandse burens.'*

*Een tweede bijdrage van Feys en Van Biervliet draagt als titel: Standards en Math wars. Dit artikel beschrijft de Math wars die in de Verenigde Staten woeden tussen de voor- en tegenstanders van het constructivistische (realistische) rekenen dat in 1989 vorm had gekregen in Standards (NCTM) voor wiskunde- en rekenonderwijs. Dat leidde gaandeweg tot steeds heviger wordende protesten van de kant van wiskundigen en bètawetenschappers, uitmondend in een manifest van november 1999. De staat Californië, een van de eersten die de nieuwe Standards had omarmd, besloot al in 1997 het roer radikaal om te gooien. Een onderzoekscommissie had de curricula van de op wiskundegebied wereldwijd best presterende landen; Hong-Kong, Singapore, Japan, Korea, Vlaanderen (!) en Tsjechië bestudeerd, en was daarop gekomen met een tegendocument, het Californische 'Key Standard' mathematics curriculum, een document waarnaar recent ook Bas Braams verwezen heeft in zijn kritiek op het rapport van de commissie Meijerink.*

Inmiddels is het me duidelijk geworden wat er moet gebeuren om de dramatisch slechte toestand van het rekenonderwijs in Nederland te verbeteren. Anders dan in de Verenigde Staten hoeven we hier geen uitgebreide studie te verrichten naar hoe we te werk moeten gaan. Alle Nederlandse leermiddelen voor de basisschool, of ze nu Pluspunt heten, De Wereld in Getallen, Rekenrijk, Alles Telt, Talrijk of Wis en Reken, allemaal zijn ze doortrokken van realistisch rekenen, inclusief, kolomsgewijs rekenen, happen in plaats van staartdelen, handig rekenen en hoofdreken-fetisjisme, en allemaal ontberen ze een systematische opzet en een uitgelezen collectie oefenmateriaal. Maar de Vlamingen doen het uitstekend. Zij combineren moderne inzichten die hun waarde bewezen hebben met traditioneel degelijke onderwijsmethoden. Ze spreken dezelfde taal, hebben hetzelfde metrieke stelsel en dezelfde munteenheid als wij. Waarom nemen we niet gewoon ook hun reken- en wiskundeboeken over?"

## 7 Besluiten

In voorliggend themanummer beschrijven en analyseren we vooral de constructivistische en competentiegerichte benadering binnen het wiskundeonderwijs. We besteden hierbij veel aandacht aan de rekenoorlog in Nederland. Ook in andere landen (VS, Frankrijk, Québec ...) een analoog wiskundedebat gaande is. We participeren zelf aan het Nederlands debat omwille van meerdere redenen. Vooreerst omdat we willen bijdragen tot het stofferen ervan, mede vanuit onze ervaring als lerarenopleiders en vanuit onze vakdidactische publicaties. We betreuren in dit verband dat de Freudenthalers de kritiek ten onrechte ridiculiseren.

We bekijken het huidige debat ook vanuit reflectie op het verleden en de toekomst van ons (wiskunde) onderwijs. We beschrijven onze inspanningen om zo'n rekenoorlog in Vlaanderen te voorkomen – ook binnen de commissies voor de eindtermen en leerplannen. We hopen op nog meer steun voor de verdere herwaardering van de beproefde wiskundewaarden en van het belang van directe en gestructureerde instructie. De DVO (nu Entiteit curriculum) verwoordde onlangs dat ze bij de herziening van de eindtermen nog sterker de constructivistische en competentiegerichte toer op wil. We maken ons daar grote zorgen over. Reflectie op de recente wiskunde-oorlog in Nederland en elders kan er toe bijdragen dat ook de DVO en een aantal begeleiders, opleiders en inspecteurs meer afstand nemen van het realistische en constructivistische gedachtegoed.

De kritiek in Nederland op de realistische inslag van het voortgezet onderwijs en de geprogrammeerde bijsturingen zijn ook belangrijk voor het debat over de wiskunde in ons secundair onderwijs. Er was bijvoorbeeld tot nu toe nog geen debat over het ontwerpleerplan voor 2009. Met een bijdrage hierover op pagina 43 e.v. willen we zo'n debat op gang trekken. We vinden verder dat zowel Nederland als Vlaanderen baat hebben bij het uitwisselen van ideeën, leerplannen, centrale toetsen e.d. Als O-ZON-vereniging vinden we verder dat *Periodiek Peilingsonderzoek* ook bij ons nuttig zou zijn. Zo'n onderzoek is belangrijker dan de huidige minimale evaluatie van de minimale eindtermen.

Ten slotte vinden we het debat ook belangrijk omdat de zegeningen van het constructivisme vaak geïllustreerd werden aan de hand van het wiskundeonderwijs. Zo legitimeerde *prof. Fred Korthagen* zijn 'realistisch' concept voor de lerarenopleiding in zijn oratie 'Leraren leren leren' (1998): "Eén van de meest indrukwekkende onderwijsontwikkelingen van de laatste decennia is de invoering van het zgn. realistisch wiskundeonderwijs. Er is daarin vrij rigoureuze gebroken met de traditionele benadering die uitging van de theorie. In het realistisch wiskundeonderwijs ligt het vertrekpunt steeds in de aanname dat leerlingen zelf wiskundige noties kunnen ontwikkelen op basis van reële problemen. Die problemen worden gepresenteerd in voor de leerlingen herkenbare contexten en komen vaak uit het dagelijks leven". Korthagen fantaseert dat we de leerkrachten louter opleid(den) vanuit de theorie en hij propageert als betoverend alternatief zijn 'Realistisch Opleidingsonderwijs' dat uitgaat van concrete praktijkproblemen en concerns, zoals ervaren door de (aanstaande) leraar in reële contexten." Nu de tover van het realistische en 'gesitueerde' wiskundeonderwijs aan het verdwijnen is, zullen Korthagen en co hun legitimering elders moeten zoeken.

## Bijlage: Illustraties lage peil basisonderwijs

### 1 'Al 20 jaar onder de maat'

Sinds 1986 is er in Nederland geregeld een Periodiek Peilingsonderzoek (PPON) van het CITO bij leerlingen uit het zesde leerjaar. In PPON 1997 werd vastgesteld dat de resultaten nog een stuk lager waren dan deze van 1986 en dit niettegenstaande de grote investering van centen en energie in de 'realistische' hervorming. Ook de alternatieve aanpak van het cijferen bleek catastrofaal. En volgens ex-Cito-hoofd *Paul van Dam* was het peil van 1986 ook al een flink stuk lager dan in 1970 en 1960.

Ook de PPON-resultaten van 2004 lokten veel kritiek uit. We verwijzen even naar een rapport van *Paul van Dam*, voormalig Cito-hoofd (Cito = centraal toetsinstituut). *Van Dam* analyseerde over een periode van twintig jaar de uitslagen van de *Periodieke Peilingen van het Onderwijsniveau* (PPON) die werden uitgevoerd door het Cito, omdat het hem verontrustte dat die onderzoeken nooit tot een discussie over het niveau van het onderwijs leidden.

In april 2007 publiceerde van Dam zijn bevindingen. Zijn conclusie luidt: *"In bijna alle vakken scoren leerlingen al bijna 20 jaar onder de maat"* (*Niveau Basisonderwijs is al meer dan 20 jaar te laag*, zegt oud-Citoman, NRC, 12.04.08). Als oorzaken voor de achteruitgang van het rekenen kunnen volgens hem meerdere zaken vermeld worden. Van Dam wijst o.a. op de toenemende ontscholing en 'verleuking' sinds 1970, op het ontbreken van duidelijke eindtermen en leerlijnen en op de negatieve invloed van het Freudenthal Instituut.

### 2 Illustraties lage peil uit PPON-2004

*Van Dam* illustreert in zijn rapport en in krantenbijdragen dat veel leerlingen ook volgens PPON-2004 voor wiskunde al te zwak presteren. Hij poneert: *"Voor bewerkingen als optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen haalde minder dan 30 procent van de kinderen in 2004 de norm, en dat was duidelijk slechter dan in het eerste PPON-rapport van 1986. Voor cijferend rekenen scoren de leerlingen bijzonder zwak. De leerlingen die de door het FI gepropageerde alternatieve aanpak van het cijferen toepassen slagen er zelfs meestal niet in een*

*correcte berekening te maken. ... In 2004 kon minder dan 10 % van de leerlingen groep 8 (= zesde leerjaar) volgende opgave oplossen: "De ontwikkelduur van een filmpje is 12 minuten. Voor een speciaal effect moet de tijd met 10 % worden verlengd. Hoe lang duurt het ontwikkelen dan?"*

Als de oud-Citoman de toetsopgaven van nu vergelijkt met de moeilijkheidsgraad van toetsopgaven 30 à 50 jaar geleden, dan merkt hij nog veel meer dat het niveau sterk is gedaald. Het niveau was volgens Van Dam ook al twintig jaar geleden (bij PPON-onderzoek van 1986) een flink stuk gedaald. De eerste PPON-opgaven uit 1986 waren al veel eenvoudiger dan deze van 30 à 50 jaar geleden.

Paul Van Dam verzucht: *"Wat is er de voorbije decennia al niet gedaan om het rekenonderwijs te verbeteren? Er is zelfs een heel instituut voor opgericht, het Freudenthal Instituut. Als ik alle onderzoeksresultaten zie en de rapportages bekijk van de inspectie, dan is de opbrengst echter niet om over naar huis te schrijven. Nog steeds zijn er grote aantallen leerlingen die eenvoudige sommen niet kunnen maken."*

We vermelden nog even enkele tegenvallende resultaten uit PPON-onderzoek van 2004. Slechts ruim een derde van de leerlingen kon volgende vraag beantwoorden: *"Het aantal inwoners van Obelin is in zes jaar van 189 500 naar een kwart miljoen gestegen. Hoeveel inwoners zijn er in die zes jaar bijgekomen?"*

De gemiddelde 12-jarige leerling uit PPON 2004 beheerste ook opgaven van het volgende genre niet:

- Hoeveel kosten 25 atlanten van € 19,50 per stuk?
- Martijn heeft 200 vragenlijsten verstuurd. 52 vragenlijsten kwamen ingevuld terug. Hoeveel procent is dat?
- Koen heeft autopech op de snelweg. Hij staat bij het bordje 36,4 km. Bij het bordje 37,0 km kan hij om hulp bellen. Hoeveel meter moet hij lopen tot het bordje 37,0 km?
- $1 \text{ cm}^2 = \dots \text{ mm}^2$
- Eén ton is 1000 kg. Een tram weegt 28 ton. Hoeveel kg weegt de tram?'

## National Mathematics Advisory Panel pleit in VS voor *computational proficiency plus conceptual understanding*

### 1 Inleiding (Raf Feys)

In de Verenigde Staten lokten de constructivistische en competentiegerichte eindtermen, de *Standards* van 1989, een wiskunde-oorlog uit. Ook de lage score op het internationaal vergelijkend TIMSS-onderzoek veroorzaakte veel misnoegdheid. Om uit de impasse te geraken werd vorig jaar een '*National Mathematics Advisory Panel*' aangesteld dat een advies moest formuleren. In zijn '*Final Report*' van maart 2008 nam het *Panel* afstand van eenzijdige visies zoals deze van de constructivistische *Standards* van 1989.

Het *Panel* vat zijn methodische visie samen in termen van *vaardig en vlot berekenen plus conceptueel inzicht*. Het pleit voor een uitgebalanceerde aanpak die nauw aansluit bij de visie die we binnen de Torhoutse lerarenopleiding steeds verkondigd hebben. De *Panel*-richtlijnen wijken in sterke mate af van de visie van het realistisch wiskundeonderwijs van het Freudenthal Instituut.

Een vergelijking met de recente methodische richtlijnen in het (ontwerp)leerplan 2009 (VVKSO) voor de eerste graad secundair onderwijs (zie pagina 43 e.v.) is eveneens leerrijk. De modieuze refreintjes uit het ontwerp-leerplan – constructivisme e.d. – treft men niet aan in het *Final Report*. Er is ook meer aandacht voor rekenvaardigheid.

We citeren in punt 2 de belangrijkste algemene conclusies in verband met de methodische aanpak. Het gaat om stellingen die ook binnen het debat in Nederland weerklinken.

### 2 Algemene conclusies

*"Debates regarding the relative importance of conceptual knowledge, procedural skills (e.g., the standard algorithms), and the commitment of addition, subtraction, multiplication, and division facts to long-term memory are misguided. These capabilities are mutually supportive, each facilitating learning of the others. Conceptual understanding of mathematical operations, fluent execution of procedures, and fast access to number combinations together support effective and efficient problem solving.*

*Computational facility with whole number operations rests on the automatic recall of addition and related subtraction facts, and of multiplication and related division facts. It requires fluency with the standard algorithms for addition, subtraction, multiplication, and division. Fluent use of the algorithms not only depends on the automatic recall of number facts but also reinforces it.*

Studies of children in the United States, comparisons of these children with children from other nations with higher mathematics achievement, and even cross-generational changes within the United States indicate that many contemporary U.S. children do not reach the point of fast and efficient solving of single-digit addition, subtraction, multiplication, and division with whole numbers, much less fluent execution of more complex algorithms as early as children in many other countries. Surprisingly, many never gain such proficiency.

The reasons for differences in the computational fluency of children in the United States and peers in countries with higher mathematics achievement are multifaceted. They include quantity and quality of practice, emphases within curricula, and parental involvement in mathematics learning. As an example, in elementary school textbooks in the United States, easier arithmetic problems are presented far more frequently than harder problems. The opposite is the case in countries with higher mathematics achievement, such as Singapore. Few curricula in the United States provide sufficient practice to ensure fast and efficient solving of basic fact combinations and execution of the standard algorithms.

Understanding core concepts is also a necessary component of proficiency with arithmetic and is needed to transfer previously learned procedures to solve novel problems. U.S. students' poor knowledge of the core arithmetical concepts impedes their learning of algebra and is an unacceptable indication of a substantive gap in the mathematics curricula that must be addressed. (*National Mathematics Advisory Panel Final Report*, p. 27)



## Kritiek van prof. Jan van de Craats op 'realistisch' wiskunde-onderwijs van Freudenthal Instituut

### 1 Inleiding

Op donderdag 18 januari 2007 hield ik op de 25ste Panamaconferentie een lezing onder de titel *'Mythen in de rekendidactiek. Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen.* Daan en Sanne zijn gemiddelde leerlingen van groep 8 (= zesde leerjaar), de hoogste klas van de basisschool. Ze kunnen niet rekenen. Hoe we dat weten? Uit de media bijvoorbeeld. Daar is de laatste tijd breed uitgemeten dat scholieren en studenten grote moeite met rekenen hebben. Maar het is ook objectief vastgesteld in een grootschalig statistisch onderzoek dat al in 2004 op de Nederlandse basisscholen is gehouden. Het gaat hier om PPON 2004, de door het Cito in opdracht van het Ministerie van OCW uitgevoerde Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau voor rekenen en wiskunde. Daan en Sanne kunnen, zo blijkt uit dat onderzoek, zelfs de eenvoudigste rekensommen niet maken.

De verhalen in de media zijn helaas maar al te waar. In mijn boek hierover staan een stuk of vijftig voorbeeldopgaven. Allemaal komen ze uit het PPON-onderzoek en ze hebben gemeen dat de doorsneeleerling van groep 8 (= zesde leerjaar) ze niet kan maken. Onvoorstelbaar, maar waar. Het gaat dan om sommen als:

- Pieter is met de auto op vakantie geweest. Aan het begin stond de kilometerstand op 0038796,00, aan het eind op 0040372,00. Hoeveel kilometer heeft Pieter in de vakantie gereden?
- $99 \times 99 = \dots$
- Wilma en haar twee zussen verdelen € 8, 85. Hoeveel krijgt ieder?
- Oma verdeelt 12 liter vanillevla eerlijk over drie bakjes. Hoeveel vanillevla komt er in elk bakje?
- De Albo bank geeft 4 procent rente per jaar. Hoeveel rente levert een bedrag van € 100 op in een jaar?
- Koen heeft autopech op de snelweg. Hij staat bij het bordje 36,4 km. Bij het bordje 37,0 km kan hij om hulp bellen. Hoeveel meter moet hij lopen tot het bordje 37,0 km?

In deze bijdrage laat ik zien hoe ernstig de situatie in feite is. Welke didactische blunders deze narigheid hebben veroorzaakt. Wat er mis is met het huidige lesmateriaal.

Hoe het komt dat matige en zwakke leerlingen door de moderne methodes tot wanhoop worden gedreven. Waarom veel leerlingen al in groep 4 (= 2<sup>de</sup> leerjaar) van de basisschool een geweldige hekel aan rekenen hebben. En hoe het komt dat zelfs de beste leerlingen op school niet meer leren hoe je vlot en foutloos getallen kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

### 2 Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen

Het toeval wilde dat ik eind 2006 gevraagd werd een lezing te houden tijdens de Panama-conferentie op 18 januari 2007. Dat is een conferentie voor pabodocenten en rekendidactici (Panama staat voor PABo NAscholing MAthematische Activiteiten). Ik koos voor *'Mythen in de rekendidactiek'*, een lezing die veel stof deed opwaaien. Die lezing heb ik kort daarna uitgewerkt tot een artikel *Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen.* Pas bij de voorbereiding van mijn lezing ben ik me gaan verdiepen in de *'revolutie in het rekenonderwijs'* (Treffers) die zich de afgelopen dertig jaar heeft voltrokken en die onder andere tot uiting komt in het huidige lesmateriaal voor rekenen op de basisschool en de pabo (= normaalschool).

In mijn Daan-en-Sanne-stuk heb ik mijn geschokte reactie daarop beschreven. 'Handig rekenen', 'kolomsgewijs rekenen', 'happen in plaats van staart-delen', het zijn allemaal concepten die ik niet anders kan kwalificeren dan als kolossale didactische blunders.

Dat ik in die opinie niet alleen sta, bewijzen de talrijke reacties op mijn stuk, onder andere van docenten primair onderwijs, interne begeleiders en remedial teachers. Wat prominent uit de reacties op Daan-en-Sanne naar voren komt, is de klacht dat er in het primair onderwijs geen keuze meer is: alle leerboeken zijn opgezet volgens het nieuwe rekenen. Ook het rekenonderwijs op de pabo wordt er geheel door gedomineerd.

Wie als kritische buitenstaander de moeite neemt het lesmateriaal voor rekenen op de basisschool en de pabo door te kijken, moet al snel vaststellen dat het geen wonder is dat *Daan en Sanne* (en hun meesters en juffen) niet kunnen rekenen. Naast prachtige plaatjes, leuke rekencontexten, mooie voorbeelden en uitdagende puzzeltjes, vertonen die boeken en werkschriften ook ernstige didactische gebreken. Vooral bij middelmatige en zwakke leerlingen moeten die wel tot grote problemen leiden.

Kort samengevat luiden die manco's als volgt:

- de leerlingen krijgen omslachtige rekenmethoden (berekeningswijzen) voorgezet,
- de presentatie is chaotisch,
- er is veel te weinig aandacht voor systematisch oefenen,
- de kinderen worden in verwarring gebracht doordat er bij elk type rekenbewerking allerlei berekeningswijzen door en naast elkaar worden gepresenteerd. Soms zijn dat alleen maar foefjes waarmee je af en toe bepaalde berekeningen kunt verkorten, maar die geen algemene geldigheid hebben. Ze worden in het moderne jargon 'handig rekenen' genoemd. Voorbeeld:  $24 \times 125$  reken je uit door  $12 \times 250$  te nemen of  $6 \times 500$ , en dat kun je uit je hoofd. Leuk en slim, maar bij  $26 \times 127$  of  $29 \times 123$  werkt het niet meer.

Het is niet moeilijk te bedenken dat zwakke leerlingen door die overvloed aan handigheidjes al snel de kluts kwijtraken: iedere som wordt op die manier immers een totaal nieuw probleem waarvoor in gedachten een heel repertoire aan trucjes afgelopen moet worden. En natuurlijk kiezen leerlingen dan vaak niet de handigste methode. Of ze bedenken zelf iets, dat dan niet zelden ook nog fout is. ...

Andere rekenmethodes in de moderne boekjes werken wel altijd, maar ze zijn zo onhandig en omslachtig, dat rekenfouten haast onvermijdelijk zijn. Dat geldt met name voor het zogenaamde 'kolomsgewijs rekenen' – ik zal later uitleggen wat daarmee wordt bedoeld, en voor de 'hapmethodes' die de *staartdeling* hebben verdrongen.

Nu al zeg ik dat ik het een schandaal vind dat dit soort rekenen in het lesmateriaal terecht is gekomen.

## 2 Mythes

Veel van de narigheid in het wiskundeonderwijs is terug te voeren op drie hardnekkige mythen in de rekendidactiek. Je vindt ze in allerlei vormen terug in het rekenmateriaal en in de moderne rekendidactische vakliteratuur. Ik behandel ze stuk voor stuk.

### 2.1 Mythe 1: eerst begrijpen, dan pas oefenen

Deze mythe kent ook allerlei andere formuleringen. Bijvoorbeeld: *het inoefenen van een vaardigheid kan pas met vrucht gebeuren nadat inzicht in die vaardigheid is verkregen*. Of: let op, leer geen onbegrepen regels uit je hoofd! Of: oefenen zonder inzicht geeft kennis zonder uitzicht.

Het klinkt allemaal heel aannemelijk, vooral als het op rijm gesteld is, maar het is kletsboek. Leren rekenen gaat namelijk heel anders. Het is eerder het omgekeerde: juist tijdens het oefenen ontstaat geleidelijk steeds meer begrip. Eigenlijk is het de oude wijsheid *oefening baart kunst*, waarbij kunst hier niet alleen rekenvaardigheid, maar ook begrip omvat. Zeker wanneer het oefenen systematisch opgezet is en wordt ingebed in verdiepingsronden zoals hieronder wordt beschreven.

*Hoe verlopen succesvolle leerprocessen?*

Succesvolle leerprocessen in het rekenonderwijs doorlopen de volgende fasen:

1. Oriëntering (context, voorbeelden)
2. Oefenen, eerst makkelijk, dan iets moeilijker. Geen contexten!
3. Verdieping met contexten en voorbeelden
4. Meer oefeningen, zonder contexten
5. Verdere verdieping, voorbeelden, contexten... waarbij de stappen 4 en 5 naar behoefte herhaald kunnen worden.

In stap 1 wordt aangehaakt bij datgene wat de leerling al weet en kent. Daarbij hoort een uitleg van de nieuwe methode (berekeningswijze) in de allereenvoudigste gevallen, net genoeg om aan de eerste serie gemakkelijke oefenopgaven te kunnen beginnen. Voor bijles of bijspijskeronderwijs kan fase 1 kort gehouden worden of zelfs achterwege blijven; op school moet aan die fase daarentegen juist veel aandacht worden besteed met allerlei voorbeelden uit de dagelijkse rekenpraktijk. En het moet gezegd worden: juist op dit gebied bevatten de moderne methodes een schat aan aantrekkelijk en effectief materiaal.

Het oefenen in fase 2 zal daarna echter meestal met 'uitgeklede' rekenopgaven gebeuren omdat contexten in dat stadium de aandacht alleen maar afleiden van de essentie. Belangrijk is wel dat die oefenopgaven zeer eenvoudig beginnen en heel geleidelijk moeilijker worden. Zo blijven ook de zwakste leerlingen bij de les, en zo bouwen ook die leerlingen zelfvertrouwen en rekenvaardigheden op.

In fase 3, de eerste verdiepfase, kunnen de praktijkvoorbeelden en de contexten weer terugkeren. Je kijkt daarbij terug op wat je geleerd hebt en de docent legt opnieuw uit hoe en waarom de methode werkt. Dat valt dan in vruchtbare aarde, en zo neemt bij de leerlingen geleidelijk het begrip toe. Met de fasen 4 en 5 wordt de methode telkens verder uitgediept.

Als docent moet je niet verbaasd zijn als er tijdens de oefeningen in de fasen 2 en 4 telkens andere leerlingen steeds weer dezelfde vraag stellen, vaak over iets dat je nog geen twee minuten eerder aan de hele klas hebt uitgelegd. Maar toen ging het blijkbaar over de hoofden heen; pas doordat leerlingen zelf sommen hebben geprobeerd, valt het kwartje. Elke goede docent kent zulke ervaringen.

## 2.2 Mythe 2: leerlingen vinden rijtjes sommen en oefenen vreselijk

De tweede mythe gaat over de bekende, en in sommige kringen beruchte rijtjes oefenopgaven. Ook deze mythe is wijdverbreid. *De werkelijkheid is echter dat leerlingen graag rijtjes sommen maken, mits die goed en systematisch zijn opgebouwd zodat ze het idee krijgen dat ze echt iets leren.* Helaas wordt die mythe ook gevoed door veel van het moderne lesmateriaal. Daarin staan namelijk ook wel rijtjes sommen, maar dan rijtjes waarbij elke opgave weer een nieuwe moeilijkheid of truc (berekingswijze) bevat.

Rijtjes gelijksoortige sommen waarbij je een vaardigheid door systematisch oefenen onder de knie krijgt, zijn helaas zeldzaam. Geen wonder dat leerlingen dan een hekel krijgen aan rekenen als ze de kans niet krijgen door oefenen zelfvertrouwen op te bouwen. Laat ze rustig tien sommen maken van hetzelfde type. Het zal steeds vlotter gaan, en als ze na afloop aan de hand van de antwoordenlijst constateren dat ze ze goed hebben, zijn ze buitengewoon tevreden – en terecht. Ze hebben weer wat geleerd!

Mythe 1 en mythe 2 hebben ertoe geleid dat *systematisch oefenen* de laatste tijd in het verdomhoekje terecht is gekomen. Er wordt in de moderne reken-didactiek ook een aparte vakterm voor gebruikt: *cijferen*. Bij 'cijferen' gaat het volgens de didactici alleen maar om het mechanisch ('mechanistisch' zeggen ze, en dat klinkt nog veel vreselijker!) uitvoeren van rekenrecepten. Daarbij werk je volgens hen niet met getallen, maar alleen maar betekenisloos met losse cijfers, als een soort rekenmachine van vlees en bloed. De achterliggende gedachte is dat dit een minderwaardige activiteit is ('zo traint men aapjes'), en in elk geval niet nodig wanneer je maar goed begrijpt wat getallen en getallenrelaties 'eigenlijk' zijn. Dat leerlingen op die manier aantoonbaar niet leren rekenen, wordt achteloos terzijde geschoven.

Ook is het betreurenswaardig dat leerlingen door de aparte term 'cijferen' ten onrechte de indruk krijgen dat er een tegenstelling zou bestaan tussen rekenen en cijferen. Als ik het voor het zeggen had, zou de term cijferen onmiddellijk uit het rekenonderwijs verdwijnen. Ook het vreselijke woord 'gecijferdheid' wordt alleen maar door rekendidactici gebruikt. Waarom niet gewoon spreken over rekenvaardigheid, want daar gaat het toch om?

## 2.3 Gevarieerde oplossingsstrategieën

De derde mythe is zonder twijfel de meest schadelijke. Ze luidt: *het is goed als leerlingen meerdere oplossingsstrategieën leren hanteren en zelf kunnen kiezen welke methode ze bij een concrete opgave willen gebruiken.* Tientallen bladzijden in het moderne rekenlesmateriaal worden gevuld met handigheidjes, oefjes, trucs en hap-snapmethodes die alleen in heel speciale gevallen vlot werken. Voor de beginner en voor de gevorderde matige of zwakke leerling is dit 'handige rekenen' rampzalig.

In feite is er voor elk type rekenbewerking één beproefd, eenvoudig en altijd werkend rekenrecept. Alle aandacht moet gericht zijn op het stap-voor-stap aanleren van die standaardrecepten. Het zijn er precies twaalf, namelijk voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van achtereenvolgens natuurlijke getallen, kommagetallen (zo heten decimale breuken op school) en breuken. De recepten voor kommagetallen zijn daarbij in wezen gelijk aan de recepten voor natuurlijke getallen, dus eigenlijk gaat het maar om acht verschillende recepten. Al het verdere rekenonderwijs kan aan deze kapstok worden opgehangen.

Het is treurig dat leerlingen van de basisschool komen zonder dat zij deze twaalf (of eigenlijk dus maar acht) recepten door en door beheersen. Overigens, ook het voortgezet onderwijs treft blaam, want daar worden deze vaardigheden vaak niet bijgehouden of bijgespijkerd. Liever wordt ongestraft toegelaten dat leerlingen naar de rekenmachine grijpen om bijvoorbeeld  $7 \times 8$  uit te rekenen. Ik haast me er bij te zeggen dat er gelukkig ook steeds meer scholen in het voortgezet onderwijs zijn waarbij de wiskundesectie wél aandacht aan rekenen is gaan besteden. Daar wordt met kale rijtjes oefensommen gerepareerd wat er op de basisschool verwaarloosd is, net zoals op hbo en universiteit via extra wiskundecursussen ontbrekende havo- en vwo-stof bijgespijkerd wordt. Betreurenswaardig, maar helaas nog steeds noodzakelijk.

### 3 Kolomsgewijs rekenen

Ik heb het hierboven al gehad over 'kolomsgewijs rekenen', een moderne didactiekterm waarmee een aantal 'nieuwe' methodes voor optellen, aftrekken en vermenigvuldigen wordt aangeduid. Dat de onhandigheden van die methodes in de rekenboekjes niet eens zo evident worden, komt doordat kolomsgewijs rekenen daar alleen maar uitgelegd wordt voor getallen van twee of hoogstens drie cijfers.

Wanneer je laat zien hoe omslachtig zulke methodes worden bij grotere getallen, zeggen de verdedigers ervan dat de leerlingen dan maar op het 'traditionele' rekenen moeten overstappen, of een rekenmachine moeten nemen. Maar dat staat lang niet altijd in de boekjes: daar wordt kolomsgewijs rekenen vaak als een volwaardige methode gepresenteerd. Vaak zelfs als beter (inzichtelijker) dan de traditionele methode, die dan als het 'rekenen van opa' wordt afgedaan. Maar ook als het wél gepresenteerd wordt als opstapje naar 'cijferend rekenen', krijgt kolomsgewijs rekenen het volle licht van de schijnwerpers terwijl de traditionele methodes haast nergens meer fatsoenlijk worden uitgelegd.

We lezen bijvoorbeeld in [1]: 'Omdat het cijferend rekenen binnen het basisschoolprogramma een minder grote aandacht krijgt en het kolomsgewijs rekenen centraal zal staan, zal eerst dit onderdeel geoefend worden' (blz. 23). Vervolgens wordt het 'rekenen van opa' gemakshalve maar helemaal niet meer behandeld.

#### 3.1 Kolomsgewijs optellen en aftrekken

Bij het kolomsgewijs optellen en aftrekken werk je van links naar rechts. Zie figuur 1, ontleend aan [4], een recent boek dat toekomstige pabo-studenten moet voorbereiden op de rekentoets. Bij het optellen van getallen van drie cijfers tel je dus eerst de honderdtallen, dan de tientallen en dan de eenheden op. Natuurlijk is dat niet fout, maar het is wel ontzettend onhandig bij grotere aantallen en grotere getallen (zie figuur 3, linkerkolom).

Werkelijk van de zotte is kolomsgewijs aftrekken (figuur 1, rechts), want daar moet je dan eigenlijk al met negatieve getallen gaan rekenen ('tekort'). Let wel, dit wordt thans op de basisscholen gedaan met kinderen die nog helemaal nooit eerder met aftrek-sommen te maken hebben gehad!

Bij het **kolomsgewijs optellen en aftrekken** werk je van *links naar rechts* en kijk je steeds naar de betekenis van de cijfers in de kolommen. Je laat de getallen in hun waarde.

Voor het aftrekken werk je met **tekorten** in de kolommen, als dat nodig is.

##### Voorbeeld 1

Kolomsgewijs optellen	Kolomsgewijs aftrekken
386	803
<u>673</u>	<u>261</u>
900 (= 300 + 600)	600 (= 800 - 200)
150 (= 80 + 70)	-60 (0 - 60 = 60 tekort)
<u>9</u> (= 6 + 3)	<u>2</u> (= 3 - 1)
1059	542

Figuur 1

Een simpel voorbeeld met iets grotere getallen toont de absurditeit van de 'methode' afdoende aan (zie figuur 3).

#### 3.2 Kolomsgewijs vermenigvuldigen

Maar het kan nog erger: kolomsgewijs vermenigvuldigen (zie figuur 3 rechts).

In het voorbeeld uit een bepaalde methode (zie figuur 2) wordt de vermenigvuldiging ook even 'op de manier van opa' gedaan (van rechts naar links).

Voor het **kolomsgewijze vermenigvuldigen** ga je uit van de vier deelproducten van  $(30 + 7) \times (30 + 8)$ , beginnend met de grootste waarde (van links af). Daarna tel je weer op. Dit kan ook van rechts naar links.

Van links naar rechts	Van rechts naar links
38	38
<u>37</u> ×	<u>37</u> ×
900 (30 × 30)	56 (7 × 8)
240 (30 × 8)	210 (7 × 30)
210 (7 × 30)	240 (30 × 8)
<u>56</u> + (7 × 8)	<u>900</u> × (30 × 30)
1406	1406

Figuur 2: Kolomsgewijs vermenigvuldigen ([4], blz. 74)

**Delen door herhaald aftrekken**

431 : 12		431 : 12	
<u>120</u>	10 × 12	<u>360</u>	30 × 12
311		71	
<u>120</u>	10 × 12	<u>60</u>	5 × 12
191		11	
<u>120</u>	10 × 12		35 × 12, rest 11
71			
<u>60</u>	5 × 12		
11	35 × 12, rest 11		

Figuur 4: De 'hapmethode' voor delen ([4], blz. 76)

200,00 210,00 19,00 2,30 <u>0,25</u> + 400,00 20,00 11,00 0,50 <u>0,05</u> + 431,55	78,12 13,34 142,57 92,63 <u>104,89</u> + 200,00 210,00 19,00 2,30 <u>0,25</u> + 400,00 20,00 11,00 0,50 <u>0,05</u> + 431,55	413,92 <u>376,75</u> = 100,00 60,00 tekort 3,00 tekort 0,20 <u>0,03</u> tekort 40,00 3,00 tekort 0,20 <u>0,03</u> tekort 37,00 0,20 <u>0,03</u> tekort 37,20 <u>0,03</u> tekort 37,17	345 <u>729</u> × 210000 28000 3500 6000 800 100 2700 360 <u>45</u> + 200000 30000 19000 2400 100 <u>5</u> + 251505
---	---	---	---

Figuur 3: Kolomsgewijs optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met iets grotere getallen

Gelukkig worden daar de tussenresultaten niet met 'kolomsgewijs aftrekken' berekend. Je moet er niet aan denken dat dit wel zou gebeuren. Ook bij de hapmethode is het argument weer dat leerlingen dan zouden begrijpen wat ze doen, terwijl dat bij de staartdeling niet het geval zou zijn. Of dat werkelijk waar is, is echter nooit onderzocht. Erger is natuurlijk dat de hapmethode weer uitnodigt tot onhandig en omslachtig rekenen, juist omdat het geen systematische methode is. Natuurlijk leidt dat dan ook ook tot meer fouten.

Onderzoek van *dr. C.M. van Putten* en *drs. M. Hicken-dorff* van de Leidse universiteit heeft inderdaad aangetoond dat leerlingen van groep 8 (= zesde leerjaar) die een hapmethode gebruiken, significant meer fouten maken dan leerlingen die werken met de traditionele staartdeling. Zelfs als ze alleen maar delingen met kleine getallen uitvoeren.

**4 Happen aftrekken i.p.v. cijferend delen**

Het is al vaak in de media gezegd: de kinderen weten niet meer wat een staartdeling is. Inderdaad krijgt die op school tegenwoordig maar weinig, of zelfs helemaal geen aandacht. In plaats daarvan wordt de 'hapmethode' gepropageerd. Die komt er eigenlijk op neer dat de leerling maar wat doet: telkens happen nemen van het deeltal totdat er een rest overblijft die kleiner is dan de deler. Figuur 4 laat er voorbeelden van zien.

De staartdeling is een overzichtelijke, efficiënte rekenmethode die haar waarde in vele generaties rekenonderwijs bewezen heeft. In mijn *Basisboek Rekenen* kun je op de bladzijden 42 en 43 aan de hand van een erfenisverdeling zien waarom de staartdeling werkt, en hoe die werkt. Er is niets raadselachtigs of onnatuurlijks aan. Maar ook hier geldt weer: je leert en begrijpt het recept pas volledig nadat je er veel mee hebt geoefend. Juist omdat staartdelen ongetwijfeld het lastigste rekenrecept is, moet er heel veel mee geoefend worden. Leerlingen zijn dus gebaat bij een voorzichtige, didactisch verantwoorde, stapsgewijze opbouw. Niet bij een alternatieve methode waarbij ze aangemoedigd worden maar wat aan te rommelen ('Maak je eigen voorkeur bij het noteren van de happen.').

## Boeken, artikelen, rapporten en websites

- [1] Jos van den Bergh, Petra van den Brom-Snijders, Marijke Creusen, Jan Haarsma, Rekenwijzer, Thieme Meulenhof, Utrecht/Zutphen, 2005
- [2] Jan van de Craats, Rob Bosch, Basisboek rekenen, Pearson Education, Amsterdam, 2007
- [3] Fred Goffree, Wil Oonk, Reken Vaardig – Op weg naar basale en professionele gecijferdheid, Wolters-Noordhoff, Groningen/Houten, 2004
- [4] Ed de Moor, Willem Uittenbogaard, Sieb Kemme (eindredactie), Basisvaardigheden rekenen voor de pabo, Wolters-Noordhoff, Groningen/Houten, 2006
- [5] Jan van de Craats, Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen, Nieuw Archief Voor Wiskunde, vijfde serie, jaargang 8, nr. 2, juni 2007, 132-136.
- [6] Jan Jansen, Frank van der Schoot, Bas Hemker, Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4, Uitkomsten van de vierde peiling in 2004, Cito, 2005.
- [7] Over de drempels met taal en rekenen, eindrapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, januari 2008 (SLO, Enschede).
- [8] PISA-rapporten, zie: <http://www.pisa.oecd.org/>
- [9] TIMSS-rapporten, zie: <http://nces.ed.gov/timss/index.asp>
- [10] Rapport van het Centraal Planbureau over o.a. TIMSS en PISA, zie: <http://www.cpb.nl/nl/pub/cpbreeksen/bijzonder/69/>
- [11] <http://www.rekencentrale.nl/>. Dit is de website van De rekencentrale van Rob en Marisca Milikowski.

## Bijlage over cijferen

*Prof. Kees van Putten* (Leiden) onderzoekt al vele jaren de PPON-resultaten voor cijferen. Hij stuurde hierover volgende reactie naar prof. van de Craats op 28-01-08. "Mijn eerste onderzoekjes naar de traditionele staartdeling dateren uit 1989; het was toen werk op de vierkante millimeter (computersimulatie van staartdelen als een regelgeleide cognitieve vaardigheid) en het interesseerde vrijwel niemand. Nu strijdt men publiekelijk om de staartdeling e.d. (ook in de USA is er een war on math). Op de Onderwijs Research Dagen op 6 juni 2007 in Groningen heb ik een presentatie verzorgd over strategiegebruik bij het onderdeel Bewerkingen: vermenigvuldigen uit PPON 1997 en 2004. In 2006 hebben Marian Hickendorff en ik samen met zes studenten bijna 10 000 vermenigvuldigopgaven van ruim 1500 leerlingen bekeken in de PPON-toetsboekjes die door het Cito aan de Universiteit Leiden ter beschik-

king zijn gesteld. Dit zijn de eerste resultaten en mijn AIO Marian gaat binnenkort beginnen met gedetailleerdere analyses. De traditionele vermenigvuldiging 'onder elkaar' (zoals opa het deed) komt nog steeds veel voor (in tegenstelling tot de staartdeling), maar is wel aan het teruglopen in 2004 vergeleken met 1997.

Ik heb speciaal ingezoomd op de opgave '99 x 99 = ?' omdat deze zich zo goed leent voor de zogenaamde realistische aanpak. Ik heb een groot deel van testboekjes met deze opgave uit PPON 2004 op een avond zelf nagekeken en heb die nacht bijzonder slecht geslapen: zolang de leerlingen maar 'volgens opa' rekenden, ging het meestal goed, maar realistische aanpakken via bijvoorbeeld 100 x 99 of 100 x 100 leverden een slagveld aan foutieve uitwerkingen en antwoorden op. Het begon al met fouten in 100 x 99 of 100 x 100 (met fouten als 990 respectievelijk 1000 of 100 000), en vervolgens het probleem hoeveel daarvan af te trekken (compenseren) met fouten als 1 of 2, 100 of 200 eraf. Eigenlijk was alleen de traditionele aanpak hier succesvol en konden alleen de sterke rekenaars (beste 33 %) zich een realistische aanpak veroorloven; alle andere combinaties waren kansloos.

Deze opgave bleek ook lastig op de nationale rekentest van december j.l. omdat die daar onder tijdsdruk uit het hoofd gedaan moest worden. Twee van de drie finalisten bezweken en toen kreeg de derde de tijd om het goed uit te rekenen: (100 x 99) - 99 = 9801. Komende maand analyseren we het onderdeel 'Bewerkingen': aftrekken.

Bij het slagveld aan problemen in de realistische aanpak van de opgave 99 x 99 rees bij mij de vraag waarom getalbegrip, inzicht en schattend rekenen à la FI hier zo weinig leerlingen op het juiste pad hielden. *Deze speerpunten van het realistisch rekenen laten op de peilingen vooruitgang zien, maar blijken niet goed te functioneren als er een beroep op wordt gedaan.* Waarom gaat 100 x 100 of 100 x 99 zo vaak fout? Hoezo getalbegrip? Waarom wordt zo vaak een onjuiste compensatie gebruikt? In het oppervlaktemodel van 100 x 100 tegels verwijder je eerst 100 en daarna 99 tegels, zodat je op 9801 uitkomt voor een oppervlakte van 99 x 99. Geen enkele leerling in het PPON-materiaal heb ik een dergelijke visualisatie zien gebruiken; hoezo inzichtelijk rekenen? Ik heb de indruk dat de Freudenthalers er geen benul van hebben hoe lastig zo'n 'inzicht' als onderwijsdoel eigenlijk is en voor hoe weinig leerlingen het tenslotte is weggelegd."

## Marjolein Kool, hoofdredactrice 'Volgens Bartjens' bekend: "Te weinig parate kennis en veel te weinig inoefenen"

Raf Feys

### 1 Karikatuur van kritiek

Marjolein Kool is al vele jaren hoofdredacteur van het tijdschrift 'Volgens Bartjens' en docente wiskunde op een PABO. In het redactioneel van september 2007 manifesteerde Marjolein Kool zich nog als een kritiekloze vertegenwoordiger van het realistisch wiskundeonderwijs van het Freudenthal Instituut (FI). In het redactioneel van januari 2008 gaf ze ruiterlijk toe dat er veel te weinig aandacht is voor parate kennis en inoefenen (zie punt 2).

In het redactioneel van september 2007 wees Marjolein Kool nog alle kritiek resoluut van de hand: "Ons rekenonderwijs haalt de laatste tijd regelmatig de voorpagina van de krant. Wat is het toch jammer dat de pers altijd staat te trappelen om negatief nieuws voor het voetlicht te brengen terwijl positieve zaken nauwelijks in de schijnwerpers komen..." Marjolein stelde het vervolgens voor alsof critici het hoofdrekenen totaal overbodig vinden en enkel kiezen voor mechanistisch cijferen. Ze schreef: "Leer kinderen cijferen, dat is genoeg, aldus de kritiek." Marjolein spoorde de lezers ook aan om de bijdrage te lezen van FI-man Willem Uittenbogaard waarin deze fulmineerde: "Als Van de Craats en co hun zin krijgen ontstaan hier Amerikaanse toestanden waar kinderen zelfs 7 + 8 onder elkaar uitrekenen".

De hoofdredactrice voegde er een peiling aan toe waarbij de lezers mochten kiezen tussen 'handig rekenen' en 'cijferen'. De lucide onderwijzer Kees Kan repliceerde op deze peiling: "We moeten uiteraard het schattend rekenen e.d. niet afschaffen. Maar het kan toch ook niet de bedoeling zijn dat dit het cijferend rekenen gaat vervangen!? En laat de kinderen alsjeblieft óók de tafels van vermenigvuldiging en de meeste rekenalgoritmes automatiseren. Werk a.u.b. ook aan degelijk onderwijs in het rekenen met breuken (ja, óók delen door!). De intuïtieve en inzichtelijke aanpak van het FI klinkt verder wel mooi, maar suggereert dat elke opgave zijn eigen 'heldere ingeving van het moment' vereist. Wie systematisch denkt (en dat is vooral bij rekenopgaven wel handig) extrapoleert de hap-snap methodes op natuurlijke wijze tot een functioneel algoritme. Wie zo'n algoritme beheerst schept bij zichzelf denkruimte voor vervolgbegrippen. Aldus zie ik 'inzicht

en intuïtie' vooral als het effectief concentreren en combineren van eerder opgedane kennis" (zie website 'Volgens Bartjens').

### 2 Marjolein Kool : weinig parate kennis

Marjolein start het redactioneel van januari 2008 nog steeds rancuneus: "Als de kranten niets meer hebben te melden over het klimaat of Geert Wilders, dan gaat het over rekenen. Daarbij worden de schijnwerpers gretig gericht op weer een nieuwe groep die het 'niet' blijkt te kunnen. Er wordt naarstig gezocht naar oorzaken en Zwarte Pieten. Zit het hem in de onderwijsvernieuwingen van de afgelopen jaren? Moet het realistisch rekenen verboden worden?"

Na die uitval tegen de critici bekend Marjolein evenwel: "Laat ik eens meedoen aan het koor van wanhopigen en mijn duit in het rekenzakje doen. Volgens mij wordt er op de basisschool te weinig geoefend. Ik merk dat leerkrachten prachtige rekenlessen geven. In die lessen krijgen de leerlingen de kans om zelf ontdekkingen te doen, om inzicht op te doen. Heel goed. Maar ik mis iets. Wordt de kennis die kinderen in die fantastische lessen opdoen wel genoeg verankerd? Wordt hun kennis wel parate kennis? Het lijkt een simpele oplossing, maar volgens mij moet er meer geoefend worden. Ik droom van de balans, de gulden middenweg. Eindelijk die slinger eens in het midden. Wat zou dat prachtig zijn."

Het verwaarlozen van de parate kennis en het inoefenen is op zich al een zware (zelf)kritiek. Dat leerlingen met de FI-aanpak over weinig parate kennis beschikken, maar wel over inzicht en probleemoplossend vermogen, klinkt wel ongeloofwaardig. Zonder parate kennis, ziet ook Marjolein op stagebezoek geen prachtige rekenlessen.

De kritiek op de FI-aanpak is ook veel ruimer dan M. Kool laat uitschijnen. Zo'n 7 jaar geleden hadden we op onze Torhoutse Normalschool een lang en sympathiek gesprek met Marjolein. We legden haar bij die gelegenheid ook onze veelzijdige kritiek voor en bezorgden haar een aantal publicaties waarin we een uitgebalanceerde rekendidactiek uittekenden.

## Kritiek op 'realistische' FI-aanpak n.a.v. PPON- onderzoek 1997

Pieter Van Biervliet en Raf Feys

### 1 Achteruitgang tussen 1987 en 1997

De Freudenthalers wekken op vandaag de indruk dat de kritiek op de FI-aanpak vrij recent is en vooral te maken heeft met de keuze voor cijferen i.p.v. hoofdrekenen. Mede om dit te weerleggen formuleren we in een bijdrage verderop een samenvatting van de vele kritiek die we al in de periode 1987-1993 formuleerden. Maar ook in Nederland viel er al in het verleden kritiek te beluisteren. In het NRC Handelsblad van 6 november '99 stond bijvoorbeeld te lezen: *"Leerlingen aan het einde van de basisschool zijn de laatste tien jaar slechter geworden in rekenen. Dat blijkt uit onderzoek van het Cito-instituut voor toetsontwikkeling. De prestaties bij hoofdrekenen, meten en het cijferen zijn minder."* Uit de PPON-gegevens bleek dus dat de 12-jarigen in 1997 lager scoorden en dit niettegenstaande die leerlingen opgegroeid waren met nieuwe 'realistische' methodes. De terugloop van de prestaties werd door een aantal commentatoren precies in verband gebracht met de sterke toename van het gebruik van de realistische methodes in de periode 1992-1997. Ook in de lerarenopleidingen werd er al lang geen aandacht meer besteed aan de beproefde waarden.

De meest schokkende conclusie in het rapport over de PPON-peiling van 1997 luidde: *"In vergelijking met 1992 is er een toename van het aantal onderwerpen waarop ten opzichte van 1987 een negatief jaareffect wordt gevonden. Slechts bij 8 van de 24 onderwerpen wordt een positief effect gevonden. Er lijkt sprake te zijn van een geleidelijke negatieve ontwikkeling in de rekenprestaties van de leerlingen"* (Jansen, J., van der Schoot, B. & N. Verhelst, 1999, *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool, Cito*). Was er in 1992 al sprake van een gevoelige terugloop in rekenprestaties ten opzichte van 1987, in 1997 bleek die terugloop zich voort te zetten.

Nederlandse kinderen bleken na 1987 minder goed te gaan rekenen en dit niettegenstaande de vele inspanningen en centen voor de hervorming van het wiskundeonderwijs sinds 1971 en onder leiding van het veelkoppige Freudenthal Instituut. Toenmalige Cito-medewerker Paul van Dam voegde er onlangs

nog aan toe dat het rekenniveau ook al in 1987 gevoelig gedaald was in vergelijking bijvoorbeeld met de jaren zestig en zeventig. En aangezien scholen met veel zorgleerlingen minder vlug bereid zijn om aan het PPON-onderzoek deel te nemen, mag men aannemen dat de gemiddelde resultaten voor alle scholen samen nog een flink stuk lager lag.

Op de Panama-conferentie van 1999 stond het debat over de tegenvallende resultaten in PPON-1997 centraal. In *'Panama-Post'* en *'Willem Bartjens'* werden er ook bijdragen aan gewijd. Belangrijk hierbij was het feit dat ook een paar propagandisten van de 'realistische' aanpak, J. Nelissen en K. Buys, de nodige zelfkritiek formuleerden (zie punt 2). Daarnaast formuleerden ook tal van andere sprekers op de Panama-conferentie hun kritiek (zie punt 3). Maar ook in 1999-2000 waren de FI-kopstukken niet geneigd om de kritiek ter harte te nemen (zie punt 4) en de kritiek viel weer gedurende een aantal jaren stil. Het nieuwe rapport over PPON-2004 bracht weer wat leven in de brouwerij.

### 2 Nelissen & Buys erkennen achteruitgang

#### 2.1 Analyse van Nelissen

We laten nu eerst Jo Nelissen en Kees Buys, twee sympathisanten van het realistisch rekenonderwijs, het PPON-rapport-1997 becommentariëren. Jo Nelissen vatte de peiling als volgt samen: *"Welke vaardigheden zijn de voorbije jaren precies afgenomen? Zwakker is vooreerst het hoofdrekenen: basisoperaties (dictee op tempo); hoofdrekenen: vermenigvuldigen en delen (zonder papier); bewerkingen: vermenigvuldigen en delen (met papier), samengestelde bewerkingen (met papier). Ook voor breuken (basiskennis én begrip) is er een achteruitgang geconstateerd. Een grote achteruitgang ten opzichte van de vorige peiling werd ook gevonden binnen het domein 'meten'. Ongeveer de helft van de leerlingen heeft nauwelijks notie van de gangbare oppervlaktematen en veel leerlingen hebben moeite met het uitvoeren van operaties met inhoudsmaten. Op 5 van de 8 meetonderwerpen boeken de leerlingen in 1997 een achteruitgang ten opzichte van 1992. De algemene eindconclusie kan luiden*



dat er een geleidelijke negatieve ontwikkeling in de rekenprestaties geconstateerd kan worden". Dit was overigens ook de conclusie van het CITO.

Nelissen stelde verder: "We constateren dat de standaard 'voldoende' slechts door 50 % van de leerlingen wordt gehaald, terwijl we graag zouden willen dat deze standaard door ongeveer 70 à 75 % van de leerlingen wordt bereikt. Als het verschil tussen het werkelijke niveau en dat wat de leerlingen zouden moeten kunnen om de standaard 'voldoende' te halen niet kleiner wordt, maar groter, is dat natuurlijk wel zorgelijk. Uit een aantal analyses is gebleken dat de achteruitgang bij opgaven met kommagetallen veel groter is dan de achteruitgang bij opgaven met gehele getallen. Vandaar dat voor de hoogste leerjaren de problematiek van de kommagetallen nog eens goed onder de loep moet worden genomen.

Op de tweede plaats verdient het 'meetdomein' in de groepen 7 en 8 aandacht. Veel leerlingen hebben moeite met de begrippen 'oppervlakte' en 'inhoud'. Ook de onderwerpen 'praktische meetproblemen' en 'ruimtelijk redeneren' verdienen meer aandacht. De kerndoelen die we met het onderwijs in meten en meetkunde willen realiseren moeten verder ge-operationaliseerd worden." Ook voor vraagstukken (toepassingen) scoorden de leerlingen veelal zwakker. Neem b.v. de PPON-opgave: 756 leerlingen mochten stemmen. 79 kozen voor partij 'nieuwe aanpak', 124 voor milieupartij, 517 voor 'huiswerkvriendelijke school'. De rest van de uitgebrachte stemmen was ongeldig. Hoeveel ongeldige stemmen waren dat? Nelissen schreef: "Deze laatste opgave werd in 1987 nog door 70 % van de leerlingen goed gemaakt en in 1997 door 56 % van de leerlingen. De achteruitgang is hier wel erg groot" (J. Nelissen, *Het rekenpeil aan het eind van de Nederlandse basisschool*, Willem Bartjens, jg. 19, nr. 4, 2000). Het realistisch wiskunde-onderwijs beklemtoont sterk het rekenen en toepassen 'in contexten', maar de leerlingen scoorden in 1997 toch zwakker voor vraagstukken dan in 1987.

Nelissen pleitte verder terecht voor meer aandacht voor 'praktische meetproblemen'. Ook uit een ander onderzoek bleek dat voor toepassingen op metend rekenen de leerlingen nu zwakker scoorden dan vroeger. Het gaat dan om opgaven als: "De vloer is 12 bij 20 meter, hoeveel meter tapijt van 4 breed moet gekocht worden om hem te bedekken?" Zelf hebben we destijds voor het meten in de lagere klassen inspiratie gevonden in Wiskobas-publicaties

van de jaren zeventig, maar tegelijk vonden we dat het klassieke *metend rekenen* in de hogere klassen nogal verwaarloosd werd. Dit was ook de reden waarom we het leerplan de titel 'meten én metend rekenen' invoerden, en niet louter de modieuze term 'meten' zoals in Nederland, bij de Vlaamse eindtermen, enz. Bij de voorstelling van het leerplan (katholiek onderwijs) in 1998 hebben we ook uitdrukkelijk gewezen op het feit dat in FI-publicaties de waarde van het traditionele 'metend rekenen' verwaarloosd werd. We zorgden er voor dat het Vlaamse leerplan niet dezelfde fouten beging als het FI en dat het 'metriek' kind niet met het (realistische) meet-badwater werd weggegooid.

## 2.2 Buys: achteruitgang hoofdrekenen

Ook de SLO-er *Kees Buys* toonde in 1999 zijn bezorgdheid. Buys schreef: "De tegenvallende PPON-resultaten hebben heel wat stof doen opwaaien. Deze zijn des te opmerkelijker omdat ze zich over een betrekkelijk breed front voordoen: zowel op het gebied van hoofdrekenen, getallen, cijferen als op het gebied van het meten, blijken de resultaten van 1997 in groep 8 (= zesde leerjaar) minder dan die van 1992 en 1987. Deze ontwikkeling is zeker wat het hoofdrekenen betreft zorgwekkend is. Hoofdrekenen is immers in toenemende mate aan het uitgroeien tot de 'stam' van het reken-wiskunde-onderwijs, met cijferend rekenen en schattend rekenen als belangrijke vertakkingen." Uit deze uitspraak blijkt duidelijk dat de kritiek niet enkel en in de eerste plaats te maken had met het cijferen.

Kees Buys vervolgde: "Het is van groot belang dat ook zwakkere leerlingen optimaal kunnen profiteren van de realistische ontwikkeling. Op dit moment lijkt dit nog niet het geval te zijn. Zo scoren de leerlingen zwak op elementaire opgaven als  $20 \times 2400$ ,  $8 \times 98$ . Verder worden b.v. het 'sokkenprobleem' (meneer fluiters koopt vijf paar sokken voor 8 gulden. Hoeveel kosten die sokken per paar?) en het 'folderprobleem' door de zwakkere leerlingen in groep 8 (= zesde leerjaar) niet goed gemaakt. (Folderprobleem: Kees verdient met het rondbrengen van folders 7,50 per keer. Na hoeveel keer kan hij zijn fel begeerde televisie van 299 gulden kopen?). Het gaat hier toch om opgaven die door vrijwel alle leerlingen goed gemaakt moeten worden" (Tijdschrift nascholing en onderzoek van het reken-wiskunde-onderwijs, april 2000).

### 3 FI staat niet open voor kritiek

Het FI en de meest fervente aanhangers van het realistisch wiskundeonderwijs zaten verveeld met de PPON-uitslag van 1997. De Panama-najaarsconferentie van 1999 stond dan ook in het teken van die PPON-evaluatie. Door de fervente voorstanders werden allerhande verklaringen (lees: uitvluchten) naar voren geschoven, maar geen enkele zocht een belangrijke oorzaak in mogelijke tekorten in de realistische methodiek. B. Imandt, docent PABO-Heerlen, die de Panama-conferentie bijwoonde, verwoordde achteraf in een getuigenis zijn ongenoegen over de al te gemakkelijke verklaringen die FI-directeur Treffers (FI) en anderen op de conferentie formuleerden.

*Imandt schreef: "Kenmerkend voor de beluisterde stellingnamen vind ik het onwrikbare geloof in het eigen model. Het paradigma van de constructivistische rekendidactiek wordt niet verlaten, integendeel: de theorie klopt, en dus de methoden ook, dus moet het ergens anders aan liggen: de opleiding, de na- en bijscholing. Ik vind het een gemiste kans. Er zijn genoeg mensen die anders denken over rekenwiskundeonderwijs. Dus: laat eens een tegengesteld geluid horen, stel je eigen denken ter discussie, verantwoord het maar" (Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenwiskunde-onderwijs, december '99, p. 9).*

Wat ook opviel was dat er op de *Panamaconferentie* nergens verwezen werd naar een mogelijk verband tussen de tegenvallende resultaten in het PPON-rapport van 1999 en een aantal knelpunten die al in het inspectierapport 'Rekenen en wiskunde in het primair onderwijs' (1997) opgesomd werden. Volgens het inspectierapport waren vaak voorkomende knelpunten:

- Te weinig aandacht voor automatisering en te weinig oefenstof
- Onvoldoende inzicht in de opbouw van leerlijnen
- Te weinig oefenstof en alternatieven voor zowel de goede als de zwakke rekenaars
- Te weinig voorbeelden van contextproblemen en toepassingsgerichte oefeningen (vraagstukken)

### 4 Verwarrend alternatief cijferen

Wat lerarenopleider B. Imandt op de Panamaconferentie wel apprecieerde was de kritische sfeer in een werkgroep waarin uit het PPON-leerlingenmateriaal voor de topic cijferend delen bleek dat

*'leerlingen voor het cijferen verdwalen en het licht in het bos van de hoofdrekenstappen en de schematische notatiewijzen niet meer zien'". Dit was dus kritiek op de nefaste alternatieve aanpak van het cijferen. Zelf publiceerden we al vele jaren geleden vernietigende kritiek op de alternatieve aanpak van het cijferen. We begrepen echt niet hoe wiskundigen als Treffers de essentie van het handig cijferen – het *positioneel splitsen* van het deeltal – links liet liggen en tegelijk de indruk wekten dat die cijferende aanpak niet inzichtelijk aangebracht kon worden. Terloops: uit PPON-2004 bleek eens te meer dat de alternatieve FI-aanpak niet deugt.*

### 5 Te gevarieerd hoofdrekenen, geen gestandaardiseerd rekenen

*Kees Buys, redacteur van een realistische methode en momenteel FI-medewerker, formuleerde in zijn bijdrage een belangrijke verklaring voor de zwakke scores. We volgen even zijn betoog: "Een wezenlijk kenmerk van realistisch reken-wiskundeonderwijs is gelegen in de wijze waarop de overdracht van kennis plaatsvindt. Het is in deze benadering niet zozeer de leraar die haar kennis overdraagt op de kinderen door uit te leggen hoe het kan of moet. De kinderen zelf hebben een essentiële inbreng in hun leerproces, doordat zij uitgenodigd worden bij zichzelf te rade te gaan en eigen strategieën aan te dragen; en doordat in het onderwijs aansluiting wordt gezocht bij deze strategieën en gepoogd wordt de kinderen op basis van deze eigen strategieën verder te helpen..."*

*Het is echter de vraag in hoeverre in de praktijk ook de zwakkere leerlingen profijt van deze opzet hebben. Immers, er kan zich een grote verscheidenheid aan aanpakken voordoen, die niet alleen voor leerlingen, maar ook voor de leraar soms niet zo makkelijk te over- en te doorzien zijn. Hoe ga je als leraar daar mee in de praktijk om? Wat stel je uitgebreid aan de orde, wat minder? En, meer toegespitst op de zwakkere leerlingen, hoe bereik je dat ook die leerlingen de samenhang tussen de verschillende strategieën leren doorzien en optimaal de gelegenheid krijgen om een repertoire aan efficiënte hoofdrekenstrategieën op te bouwen? Het zal duidelijk zijn dat er hier nogal wat mis kan gaan zeker in klassen met veel leerlingen.*

*Bij een realistische onderwijsopzet doet zich in de praktijk van het onderwijs veelal een grote diversiteit van aanpakken voor die niet zo gemakkelijk te overzien en te doorzien zijn. Worden dergelijke aanpakken niet in voldoende mate met elkaar in verband ge-*

bracht, dan bestaat voor de zwakkere leerlingen het gevaar dat ze zich moeten vastklampen aan werkwijzen die ze niet echt begrepen hebben. Daardoor is de opgebouwde kennis niet goed 'retraceerbaar' in de zin dat de kinderen naderhand niet kunnen 'reconstrueren' waar een strategie vandaan komt, en zich dus ook niet goed kunnen vergewissen of deze correct is. Voor de verdere uitbouw en niveauverhoging van hun kennis kan deze omstandigheid remmend werken.

Ook bij Tal-onderzoekjes is gebleken waartoe dat kan leiden: sommige kinderen doorzien niet goed wat nu precies wel en niet mag en komen op een oppervlakkige manier tot een vorm van handig rekenen die men zou kunnen typeren als 'al te flexibel rekenen'. ... Er moet een zeker accent gelegd worden op het op modelmatig niveau met elkaar in verband brengen van de meer omslachtige met enkele meer geavanceerde maar toch basale aanpakken" (Buys, Kees; Hoofdrekenen anno 2000, Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het rekenwiskundeonderwijs, april 2000).

Dit was ook onze basiskritiek in onze bijdrage 'Laat het rekenen tot honderd niet in het honderd lopen' die we in 1993 in Panama-Post formuleerden. We vonden het in 1999 moedig dat de 'realist' Kees Buys deze zelfkritiek durfde formuleren. Hij had er aan toe moeten voegen dat enkel korte en gestandaardiseerde berekeningswijzen zich laten automatiseren. In zijn recente scriptie over vermenigvuldigen heeft Kees Buys dit nog eens vastgesteld.

## 6 Weinig aandacht voor automatiseren

Een klacht die door velen en al lang geformuleerd wordt betreft de verwaarlozing van alles wat te maken heeft met het automatiseren, met het mechanistisch aspect van het vlot berekenen. Volgens Ward van de Vijver van het Christelijk Pedagogisch Centrum waren de realistische methodes wel degelijk verantwoordelijk voor de geconstateerde daling in rekenprestaties. "De realistische methodes besteden immers te weinig aandacht aan het onderdeel 'automatiseren'. Ze zijn leuk en motiverend voor de kinderen maar maken ze afhankelijk van de rekenmachine. Juist op die onderdelen waar de leerlingen minder presteren dan vroeger speelt automatiseren een rol. Het is niet verwonderlijk dat daar de prestaties verslechteren. Rekenmethodes zouden hun originaliteit daarom niet alleen moeten stoppen in motiverende contexten en modellen maar ook in automatiseringsmodellen die de kinderen

aanspreken. Volgens Van de Vijver moeten ook de Pabo's (normaalscholen) meer aandacht besteden aan automatiseren en het 'abstracte' rekenen: 'Het abstracte denken en rekenen verliest aan actualiteit. De lerarenopleidingen moeten meer de nadruk leggen op de overgang van concreet naar abstract' (Didactief & School', nov. '99).

Een 'verontruste lezer' betwijfelde de zegeningen van de FI-aanpak en schreef in een brief aan de redactie van Willem Bartjens: "Men zegt dat kinderen veel meer inzicht hebben, maar wat heb je aan inzicht als je er niet door leert rekenen? Een voorbeeld: als kinderen tegenwoordig de tafels van vermenigvuldiging moeten leren, dan leren ze allerlei maniertjes om de uitkomst te berekenen. Maar als het daarbij blijft is dit heel omslachtig en de tafels geraken niet meer gememoriseerd. Is het laten opdreunen van tafels niet langer belangrijk als je weet dat ieder kind het op den duur zal weten voor de rest van zijn leven?"

In een reactie op die klacht antwoordde Hans Ter Heege (FI) de verontruste lezer dat het memoriseren van tafels volstrekt overbodig was en legde nog eens uit hoe in de realistische aanpak  $8 \times 6$  kan berekend worden als  $10 \times 6 - 2 \times 6$ , of  $5 \times 6 + 3 \times 6$  of  $6 \times 8$  of ... (Vragen van lezers, Willem Bartjens, jg. 19 nr.4, p. 17). Zelf probeerden we al in 1993 de Freudenthaler ter Heege te overtuigen van het nut van het memoriseren toen we samenwerkten aan Vlaamse Stoho-publicaties over wiskunde. Tevergeefs.

## 7 Uitvluchten FI-kopstukken

In tegenstelling met Imandt, van de Vijver, Buys, de inspectie ... bracht de directeur van het Freudenthal-instituut, prof. Adri Treffers, de oorzaak van de mindere resultaten geenszins in verband met de door het F.I. gepropageerde aanpak. Op het Panama-congres 1999 stelde hij o.a.: "De zere plek ligt op de pabo's (= normaalscholen); daar besteden ze te weinig aandacht aan rekenen en wiskunde." Volgens Hans ter Heege lag het vooral aan de leerkrachten die veel moeite hadden met de overgang naar een nieuwe methode en naar de nieuwe realistische didactiek (PPON, onderzoek van een steekproef op Nederlandse basisscholen. Enige vraagtekens, Panama-Post, 2000, jg. 19, nr. 2).

Verder formuleerden de Freudenthalers vooral kritiek op de vormgeving van de toetsvragen en op de afnamecondities. Bijvoorbeeld het niet gebruik mogen maken van papier bij hoofdrekenen. Ze

vonden dit geen 'natuurlijke' toetsituatie gezien de praktijk van het realistisch reken-wiskundeonderwijs waar het gebruik van pen en papier wordt toegelaten (lees: meestal een noodzaak is omdat de berekeningen te omslachtig zijn en het werkgeheugen overbelasten.) Traditioneel verlopen eenvoudige opgaven hoofdrekenen uit het hoofd en is er zelfs een tempodruk. De Freudenthalers gaan er blijkbaar vanuit dat leerlingen en volwassenen ook bij eenvoudige hoofdrekenopgaven steeds nood hebben aan papier en pen om een schets te maken (b.v. getallenlijn) en/of om de deeloplossingen neer te schrijven.

In het verlengde van deze discussie rees daarom de vraag of het onderscheid tussen aparte schalen 'Hoofdrekenen' en 'Bewerkingen/Cijferen' nog wel volgehouden moest worden? Is het vanuit de nieuwe onderwijspraktijk niet realistischer om leerlingen een stel opgaven voor te leggen, en aan hen zélf over te laten hoe zij die willen uitrekenen: uit het hoofd of op papier of een handige combinatie van beide? Diverse Freudenthalers wilden ook de toetspraktijk nog verdergaand herzien, en het realistische principe dat het niveau van de oplossingsstrategie even belangrijk of belangrijker is dan het gegeven antwoord, opnemen in de evaluatie (*Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, april 2000).

Op de *Panama*conferentie 1999 werden ook een zevental geselecteerde contextopgaven van het PPOON-onderzoek geanalyseerd en ook hier waren afweerreflexen en rationalisaties troef. Bij opgave X waarvoor de kinderen zwak scoorden, lezen we in het verslag bij deze opgave volgende reactie: *"En dan komt het bommetje. H. Meijer haalt de contexten in een paar opgaven genadeloos onderuit. 'Vader' (die schijnt erbij te horen ter geruststelling van de kinderen) 'legt tegelrijen van 23 tegels naast elkaar'. Hoe bedenkt hij het! Nou blijkt hij ook nog 621 tegels in voorraad te hebben! Welke vader bewaart 621 tegels in zijn tuintje? Zo werkt dat toch niet in de realiteit. Als je tegels moet leggen, dan ga je eerst uitzoeken hoeveel tegels je nodig hebt en dan ga je naar de bouwmarkt en dan die zomerprijs voor de gordijnstof! Welke winkelier bedenkt een prijs van 30,10 gulden? De centrale vraag wordt nu: Waarom beginnen kinderen zonder meer te rekenen aan zo'n onzinnige opgaven?"* (*Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, dec. '99, p. 6).

## 8 Besluit

De Freudenthalers verzwijgen anno 2008 de kritiek van weleer. Ze wekken de indruk dat de huidige kritiek van recente datum is, vooral slaat op het verwaarlozen van het klassieke cijferen en slechts door enkele mensen geformuleerd wordt. Met deze bijdrage toonden we aan dat ook al tien jaar geleden in Nederland pertinente kritiek op de FI-aanpak werd geformuleerd – ook door FI-sympathisanten als Jo Nelissen en Kees Buys.

Het viel ons in 1999 ook op dat de kritieken op de realistische aanpak die naar aanleiding van het PPOON-onderzoek naar boven kwamen, precies deze waren die wij al jaren geleden formuleerden in *Onderwijskrant*, *Willem Bartjens*, *PanamaPost*, *STOHO-publicatie van 1995*, *Rekenen tot honderd'* (Wolters-Plantyn, 1998). De FI-kopstukken wezen echter elke kritiek af. Zelf schreven we al in 1987 – 21 jaar geleden – dat het constructivisme à la Freudenthal geen alternatief bood voor de gangbare aanpak in Vlaanderen. We propageerden vanuit de Torhoutse lerarenopleiding een uitgebalanceerde visie, met veel aandacht voor de herwaardering van de beproefde waarden. In de hierop volgende bijdrage diepen we deze thematiek verder uit. Jammer genoeg stonden de Freudenthalers niet open voor kritiek.

Het feit dat FI-directeur *Adri Treffers* zich in 1999 geroepen voelde om naar het brede publiek en de overheid toe de kritiek op de realistische en constructivistische aanpak af te wijzen, belette o.i. niet dat hij er zelf wel enigszins rekening mee hield. Zo gaf Treffers in de *Tal*-publicatie van 1999 tussen de lijnen door toe dat het FI in het verleden al te weinig aandacht besteedde aan het automatiseren. FI-kopstukken als Gravemeijer, ter Heege ... waren niet tot toegevingen bereid. Het is uitgerekend Koeno Gravemeijer die nu onlangs het FI verliet. We weten niet wat de reden is, maar wellicht krijgt de gematigde strekking nu meer kans om zich te laten horen.

## Inzet voor evenwichtige rekendidactiek & leerplannen (1971-2008) & verzet tegen new math en constructivistische math

Raf Feys & Pieter Van Biervliet

### 1 Wiskunde bedreigt door extremisme

#### 1.1 Kruistocht tegen moderne wiskunde (1971-1995)

Al meer dan 40 jaar is het vak wiskunde een contro-versieel vak geworden. Toen we als student in 1968 in Leuven een zomercursus over moderne wiskunde volgden, vernamen we al dat wiskunde(didactiek) een controversiële aangelegenheid was. De profes-soren Holvoet en Vermandel maakten ons wijs dat de klassieke wiskunde op lemen voeten stond en totaal voorbijgestreefd was. Onze interesse was mede ingegeven door het feit dat we toen een scrip-tie maakten over *Jean Piaget*, boegbeeld van de new math. Lang heeft ons geloof in de 'moderne wiskunde' niet geduurd. Vanaf de jaren zeventig merkten we dat de beproefde waarden door de intrede van de 'moderne wiskunde' in de verdruk-king geraakten – ook in de lerarenopleidingen. Als docent op de Torhoutse Normaalschool bestreden we de moderne wiskunde en we ijverden voor een herwaardering en optimalisering van de beproefde waarden. Wie de centrale toetsen (kantonnale en interdiocesane) uit die tijd bekijkt, beseft dat het niveau rond 1970 nog vrij hoog lag.

Gedurende een kwarteeuw voerden we een kruis-tocht tegen de 'moderne wiskunde'. Op het VLO-startcolloquium van 1973 riepen we de vele aan-wezigen op om de 'moderne wiskunde' niet in te voeren in het lager onderwijs. In tal van publicaties voerden we dan vanaf 1974 onze kruistocht met een eerste bijdrage in *Persoon en Gemeenschap* (1974) en spreekbeurten her en der. We voelden ons lange tijd een eenzame klokkenluider. Vanaf de publicatie *'Moderne wiskunde: een vlag op een modderschuit'* – *Onderwijskrant* april 1982 – en het wiskundecolloquium van 1983 begon het tij te keren. Er verschenen geen publicaties meer over de zege-ningen van de new ma(d)th. Met de invoering van de eindtermen wiskunde (1995) en de nieuwe leerplannen (1998) werd de 'moderne wiskunde' volledig geschrapt in het basisonderwijs.

Op het VLO-colloquium van 1973 en in de 'Modder-schuit' van 1982 formuleerden we ons alternatief. Het kwam er o.i. op aan "de vele oerdegelijke ele-

menten uit het klassieke rekenen – die door de rage van de moderne wiskunde onder het stof waren geraakt, weer op te delven en om er waardevolle nieuwe elementen aan toe te voegen" (p. 3). Verder schreven we: "De vele verantwoordelijken voor de nieuwe wiskunde kennen onvoldoende de oude wiskunde met haar vele mogelijkheden en oer-degelijke methodieken" (p. 37). We herhaalden deze oproep tijdens het wiskunde-colloquium van 1983. We opteerden voor een evenwichtige visie en voor veelzijdige leerprocessen, b.v. zowel oefenen en memoriseren als conceptualisering en problem solving.

In de leerplannen, de bijscholingen en de leraren-opleidingen ging vanaf de jaren zeventig alle aandacht naar de *moderne wiskunde*. Vanuit de Torhoutse lerarenopleiding startten we een lange en zelfs *levensgevaarlijke* kruistocht tegen de invoering van de 'moderne wiskunde'. We werkten tegelijk aan de herwaardering en optimalisering van de klassieke waarden, o.a. via verspreiding van onze cursussen vakdidactiek en via bijscholingssessies. Een klein voorbeeld. Onderwijzers 1<sup>ste</sup> leerjaar deden in de jaren zeventig hun beklag over het feit dat ze niet langer meer de klassieke kwadraat-beelden als getalvoorstelling mochten gebruiken. We dokterden een methodiek uit voor het zinvol gebruik van kwadraatbeelden en toonden ook aan dat die getalvoorstellingen veel interessanter waren dan Cuisenaire-staven, Venn-diagram-voorstellingen, rekenmanneltje (Van Erp en Van Parreren), domino-beelden en rekenrek. We stellen met tevredenheid vast dat anno 2008 zo'n 90 % van de leerkrachten weer de kwadraatbeelden hebben ingevoerd.

#### 1.2 Strijd tegen constructivisme vanaf 1987

Vanaf de jaren tachtig bestempelde het Nederlandse *Freudenthal Instituut* (verder FI) die beproefde aanpakken als ouderwets en louter mechanistisch. Zelf spannen we ons al meer dan dertig jaar in om die beproefde waarden in ere te herstellen en te verlevendigen. Daarnaast propageerden we nieuwe invalshoeken zoals de invoering van ruimtelijke oriëntatie in het nieuwe leerplan van 1998. Vernieu-wing in continuïteit stond bij dit alles centraal.

In de late jaren tachtig en bij het opstellen van de eindtermen (1993) en iets later van de nieuwe leerplannen, gingen er veel stemmen op om de 'moderne wiskunde' te vervangen door een ander extreem: de constructivistische wiskunde zoals die gepropageerd werd door het FI en door de Amerikaanse Standards. De voorstanders van de zgn. realistische en constructivistische aanpak begingen precies dezelfde fouten als de voorstanders van de 'moderne wiskunde' destijds. Ze stelden de beproefde waarden radicaal in vraag en wilden het extreem van de 'hemelse' (te abstracte) New Math vervangen door de aardse tegenpool – de constructivistische wiskunde, waarbij de leerkracht al te lang blijft steken in de realiteit (voor-wiskunde, contexten) en alles uit de leerlingen moet laten komen. De typisch wiskundige vakkennis, het vlot en gestandaardiseerd rekenen, de abstrahering en veralgemening waren niet langer belangrijk, maar vooral het leren problemen oplossen en het construeren (uitvinden) van eigen begrippen en berekeningswijzen. Oerdegelijke leerprincipes waren ook plots ouderwets: gestructureerde en progressieve complicering, directe instructie, inoefenen, automatiseren en memoriseren... We voerden vanaf de late jaren tachtig actie om de overschakeling op constructivistische/realistische wiskunde te voorkomen. In een bijdrage van 1987 wezen we al het constructivisme van Freudenthal en co af (zie punt 4). Aan de situatie in ons secundair onderwijs besteden we verderop een aparte bijdrage.

Onze publicaties en oproepen in Onderwijskrant en elders waren een belangrijk instrument om de 'New Math' te bestrijden en om vanaf 1987 de overschakeling op constructivistische (realistische) wiskunde in het basisonderwijs te voorkomen.

Actieve participatie aan het opstellen van de eindtermen (1993) en de nieuwe leerplannen (1996) was eveneens belangrijk. We slaagden in het reduceren van de invloed van de constructivistische druk vanwege de DVO en vanwege een aantal beleidsmensen, vakdidactici, begeleiders en lerarenopleiders die dweepten met het FI. In de periode 1993-1995 zorgden we ook als mede-auteur voor een tegengewicht voor de vele 'realistische' bijdragen van FI-medewerkers in de vierdelige boekenreeks *Naar een nieuwe reken/wiskunde-didactiek voor de basisschool en de basiseducatie* (Stoho, Acco-Leuven). Vanaf 1998 publiceerden we onze vakdidactische ideeën meer uitgebreid in 3 boeken: *Rekenen tot honderd, Meten en metend rekenen en Meetkunde* (Wolters Plantyn).

### 1.3 Wiskunde-oorlog in Nederland

In een brief schreef de Nederlandse prof. van de Craats ons in februari 2008: "Ik ben blij dat Vlaanderen nog niet ten prooi is gevallen aan de Nederlandse wiskunde-ellende, ongetwijfeld mede dankzij uw inspanningen!" Die inspanningen waren er nodig om een tweede wiskunde-oorlog te voorkomen. Het verheugt ons dat prof. van de Craats en andere Nederlanders nu stellen dat Nederland zich best kan inspireren aan de Vlaamse leerplannen en methodes voor het basisonderwijs en aan onze publicaties. In het advies *Foundations for success* van het Amerikaanse 'National mathematics advisory panel' van maart 2008 lezen we ook dat het VS-panel zich inspireerde op de Vlaamse leerplannen voor 6- à 14-jarigen – naast deze van Singapore, Japan... Onlangs heeft ook de commissie die in 1989 de eenzijdige 'Standards' opstelde, deze gecorrigeerd in de richting die het 'National Panel' adviseert. Ook vanuit Franstalig België is er de laatste tijd interesse voor onze leerplannen en aanpak (cf. studie van Nico Hirtt).

## 2 Van Wiskobas-sympathisant naar FI-criticus

### 2.1 Wiskobas-sympathisant

De startperiode van het FI – de Wiskobasperiode van de jaren zeventig – zag er veelbelovend uit. Het verlevendigen van het klassieke rekenonderwijs stond centraal. Dit was ook nog grotendeels het geval in de volumineuze Wiskobas-leerplanpublicatie van 1975 en tijdens de erop volgende jaren. We sympathiseerden vooral ook met het feit dat de Wiskobassers afstand namen van de opkomende mode van het 'zelfstandig' rekenen en niveaurekenen zoals dit bijvoorbeeld gestalte kreeg in de methode 'Niveaucursus rekenen' en in de methodescholen. Vanaf de start van het 'Vernieuwd lager onderwijs' in 1973 werd ook in Vlaanderen het individueel en het niveau-leren sterk gepromoot. En in de methodescholen was dit nog meer het geval.

Prof. Hans Freudenthal was ook een belangrijke bondgenoot in onze strijd tegen de 'moderne wiskunde'. Bij het begin van de jaren zeventig stelden we met genoeg vast dat de Nederlandse inspectie en wat later ook Freudenthal en co zich verzetten tegen de intrede van 'New Math' in het lager onderwijs. Wiskobas wees net als wij de formele New Math-aanpak af en streefde naar een toepassingsgerichte en functionele benadering van

het rekenen. We beschouwden de Freudenthalers als onze bondgenoten en gebruikten enkele Wiskobas-bijdragen in de Torhoutse lerarenopleiding – vooral i.v.m. meten en ruimtelijke oriëntatie.

In 1983 nodigden we Freudenthal uit als spreker op het grote wiskunde-colloquium over de toekomst van ons wiskundeonderwijs. Prof. Roger Holvoet en inspecteur André Van Landeghem traden op als verdedigers van de *moderne wiskunde*; Feys en Freudenthal als tegenstanders. Met de steun van Freudenthal slaagden we erin de meeste deelnemers te overtuigen. In een gesprek over de middag stelden we wel vast dat Freudenthal veel minder waardering toonde voor het klassieke rekenen.

## 2.2 Stemmingmakerij tegen beproefde waarden

Vooraf vanaf de jaren tachtig nam binnen het FI de stemmingmakerij tegen de beproefde inhouden en methodieken sterk toe. De oude aanpak werd karikaturaal voorgesteld als ‘mechanistisch rekenen’ (of cijferen) en de realistische/constructivistische aanpak van het FI zou de verlossing uit de ellende brengen. Men stelde het zelfs voor alsof het klassieke rekenen niet beklijfde en na een aantal jaren totaal wegdeemsterde, omdat het ging om feitenkennis en gedachteloos rekenen en niet om inzichten.

In die gematigde leerplanpublicatie van 1995 kregen we al een voorsmaakje van de latere aberraties. *Adri Treffers en co* namen voor het *cijferend delen* plots radicaal afstand van de essentie van het cijferen – het positioneel of kolomsgewijs splitsen van het deeltal in b.v. honderdtallen, tientallen en eenheden. Ze namen ook afstand van een daarbij horende splitsingscontext waarbij b.v. eerst de briefjes van 100 verdeeld worden en dan deze van 10, enz. Treffers en co drongen een specifieke context op van het genre: ‘1128 soldaten moeten vervoerd worden met bussen die 36 zitplaatsen hebben. Hoeveel bussen zijn er nodig?’ Die context leidde de aandacht af van het positioneel splitsen en dreef de leerlingen in de richting van het herhaald aftrekken van veelvoud van de deler (b.v.  $10 \times 36$ ,  $10 \times 36$ ,  $5 \times 36$ ,  $2 \times 36$ ...). De leerlingen moesten ook elk voor zich de grootte van de ‘happen’ bepalen. Dit is een langdradig soort hoofd-rekenen op papier, op eigen constructie en tempo en in vele stappen (happen). Achteraf moeten de leerlingen dan nog eens de vele deelresultaten optellen ( $10 + 10 + 5 + 2$ ...). Dit had o.i. niets meer met echt en handig cijferen te maken (zie ook p. 20 & 21).

Enkele jaren later stelde Treffers deze omslachtige en onwiskundige aanpak voor als hét model van de *realistische* aanpak. De basisprincipes luiden dan ‘*zelf construeren van eigen (informele) berekeningswijzen vanuit een concrete (autobus)context*’, het achteraf zelf en in groep ‘reflecteren op de eigen constructies en op deze van de medeleerlingen, het progressief verkorten (*schematiseren*) van de omslachtige berekening (grotere happen). De leerlingen moeten zelf een procedure ontdekken en geleidelijk aan de omslachtige berekening en aanschouwelijke voorstelling verkorten (‘schematiseren’).

Waarom deden Treffers en co hier plots afstand van het ‘handige’ cijferen? Waarom voerden ze het on-economische herhaald aftrekken in? Waarom propageerden ze een buscontext die de leerlingen aanzet tot primitief herhaald aftrekken en geen context die het kolomsgewijs cijferen ondersteunt? In de geciteerde publicatie van 1995 werd nog erkend dat ook het klassieke cijferen ‘*het inzicht bevordert en de cijfervaardigheid op een hoog peil brengt*’ (p. 142), maar het droeg volgens Treffers te weinig bij tot de zelfstandige constructie van eigen berekeningswijzen en tot de geleidelijke verkorting.

In de context van de omslachtige berekeningswijze werd *progressieve schematisering* (verkorting van berekening) achteraf een noodzaak. Dit ‘realistische’ principe verving volgens de Freudenthalers het klassieke principe van de *progressieve complicering* – b.v. eerst cijferen met eenvoudige getallen en pas achteraf met moeilijke, eerst  $75 - 20$  en pas later  $75 - 28$ . Enkele jaren later typeerden Treffers en co het klassieke cijferen als louter mechanistisch en inzichteloos. En nog later werd eraan toegevoegd dat cijferen zijn maatschappelijke functie totaal verloren had.

Naast het vaarwel zeggen aan het enige en echte cijferen in 1975, voerden Treffers en co enkele jaren later plots het zogenaamd *kolomsgewijs hoofd-rekenen* in vanaf het derde leerjaar. Nadat het *positioneel* en *kolomsgewijs* cijferen in 1975 als te weinig inzichtelijk en ‘realistisch’ werd afgevoerd, werd een paar jaar later plots het *kolomsgewijs* werken weer ingevoerd, maar nu als een alternatieve vorm van hoofd-rekenen vanaf het derde leerjaar. Bij  $215 - 28$ , moest men dan al onmiddellijk als deeloplossing in de kolom van de honderdtallen 200 noteren, in de kolom van de tientallen  $-10$  ( $10 - 20$ ) en  $-3$  ( $5 - 8$ ) in de kolom van de eenheden. Het resultaat werd dan  $200 - 10 - 3 = 187$  (zie ook illustraties op pagina 20 en 21).

Eerst bestempelde Treffers het kolomsgewijs cijferend delen als mechanistisch en achteraf werd het *kolomsgewijs* hoofdrekenen ingevoerd en dat werd dan wel als inzichtelijk bestempeld. We konden de (on)logica van het FI niet volgen. Vlaamse leerkrachten die ooit in een methode met kolomsgewijs rekenen of met het FI-cijferen geconfronteerd werden, stelden al vlug vast dat dit niet goed werkte. Bepaalde realistische methodes behielden ook het klassieke cijferen. We hebben nooit begrepen waarom die fantasierijke aanpakken van Treffers en co in Nederland zo gretig ingang vonden.

### 3 Toename constructivisme sinds 1985

Mede door het aantreden van nieuwe FI-medewerkers van de stekking *Koeno Gravemeijer* ging het FI sinds 1985 steeds meer de constructivistische toer op. En in de VS verschenen in 1989 de constructivistische 'Standards'. De voorstanders van de *moderne wiskunde* spanden destijds *Jean Piaget* voor hun kar, en nu werd in de VS *Paolo Freire* het boegbeeld van de constructivistische benadering op internationale wiskundecongressen. Wat later verwezen de constructivisten ook naar Piaget. Zo werd Piaget eerst de patroon van de formalistische *moderne wiskunde* en 20 jaar later van de tegenpool – de constructivistische wiskunde. Raar maar waar.

Goffree, Treffers en De Lange bestempelden de constructivistische wending binnen het FI als de derde periode in de ontwikkeling van het realistische gedachtegoed. Ze werd volgens hen ook sterk beïnvloed door de contacten met constructivisten als Cobb (Goffree, F., Treffers A. & J. De Lange (red.) *Rekenen anno 2002*, 1992, NRW.O.) De FI-aanpak werd constructivistischer – mede door het aantreden van constructivisten als *Koeno Gravemeijer* (o.m. via contacten tussen Gravemeijer en Cobb) en door de rage van het constructivisme in de onderwijskunde. De gematigde stekking binnen het FI liet haar stem te weinig horen en belangrijke tenoren gingen op pensioen.

Prof. Koeno Gravemeijer beschreef in zijn oratie van 2001 het constructivisme van het FI als volgt: *"Het kentheoretisch uitgangspunt is hierbij dat alle kennis waarover iemand beschikt door de individuele persoon zelf wordt geconstrueerd. Kennis is daarom uniek voor elke persoon. Je zou kunnen zeggen dat iedereen zijn of haar eigen werkelijkheid maakt. In het realistisch wiskundeonderwijs wordt ernaar gestreefd de leerlingen te begeleiden in het heruitvinden van wiskunde. Het nieuwe leren veronderstelt een*

*andere rolverdeling tussen leraar en leerlingen dan het traditionele rekenonderwijs. In het traditionele rekenonderwijs was het de taak van de leerlingen uit te vinden wat de leraar in zijn/haar hoofd had. In het nieuwe onderwijs moet de leraar proberen om erachter te komen wat de leerlingen denken". Volgens Gravemeijer vereiste de informatiemaatschappij nog meer creativiteit dan de wiskunde in toepassingen à la Freudenthal en in de realistische methoden. De realistische visie moest constructivistischer worden en de leerkrachten moesten constructivistischer te werk gaan. Niettegenstaande de toenemende kritiek poneerde Gravemeijer nog in 2007: "De grondslag (van de FI-aanpak) wordt gevormd door het socio-constructivistische uitgangspunt dat de leerlingen hun eigen kennis construeren en dat de beïnvloeding hiervan door het onderwijs slechts indirect kan plaatsvinden (Ontwikkelingsonderzoek als methode voor onderzoek rond innovatieve leergangen, 2007, Pedagog. Studiën, (84), pag. 331).*

De Amerikaanse prof. G. Quirk typeerde de visie van de constructivisten en van de Amerikaanse *Standards* als volgt: *"De constructivisten en de Standards vinden het verwerven van een behoorlijke dosis wiskundige kennis niet belangrijk. Ze geloven verder dat het mogelijk is een duidelijk onderscheid te maken tussen het verwerven van denk- en probleemoplossingsvaardigheden en anderzijds het step-by-step process of building a remembered knowledge base of specific math facts and skills". ... "De constructivisten geloven bijgevolg ook niet in het belang van het vooraf specificeren van wat de leerlingen moeten leren. Dit leidt ertoe dat ze veel te weinig aandacht hebben voor de specifieke inhoudelijke doelen, voor duidelijke leerplannen, voor de traditionele methodieken en voor het toetsen van de concrete leerresultaten", aldus Quirk (<http://www.wgquirk.com/key.html>).*

### 4 1987: kritiek op FI & constructivisme

Vanaf de jaren tachtig nam dus de stemmingmakerij tegen het klassieke rekenonderwijs toe – zowel op het niveau van het basis – als van het voortgezet onderwijs. Klassieke aanpakken werden als 'mechanistisch' en geestdodend bestempeld. Nieuwe, fantasierijke en zelfs onlogische aanpakken (bijv. van het cijferen) werden de hemel in geprezen. De nieuwe 'realistische wiskunde' zou komaf maken met de oude 'mechanistische' wiskunde uit het verleden. Sinds 1987 hebben we steeds meer bijdragen gewijd aan de eenzijdigheid van de FI-aanpak en dit niettegenstaande onze sympathie



voor bepaalde frisse ideeën – b.v. inzake meten en ruimtelijke oriëntatie. In het nieuwe leerplan van 1998 hebben we enkele van die ideeën dan ook overgenomen.

In 1987 stelden we – samen met de Gentse prof. *Leo Apostel* – dat de visie van Freudenthal geen alternatief bood voor de ‘moderne wiskunde’. Freudenthal en co zagen het wiskunde-leren o.i. al te eenzijdig als een constructie van individuele leerlingen en al te weinig als verwerving van een cultuurproduct, gericht op economischer en efficiënter handelen. Freudenthal en zijn medewerkers onderschatten het socio-cultureel karakter van de wiskunde als vakdiscipline, het aspect ‘cultuuroverdracht’ en de maatschappelijke waarde (R. Feys, *‘Nationaal plan voor het wiskunde onderwijs’ Onderwijskrant* nr. 48, juli 1987). Ook op het niveau van het secundair onderwijs bleek dat het FI al te weinig waardering toonde voor de klassieke waarden.

De constructivistische visie van boegbeeld Freudenthal, maar evenzeer zijn bevlogenheid en betweterij en zijn aversie voor alles wat te maken had met leerpsychologie, leidden tot eenzijdige opvattingen. Freudenthal was hierbij beïnvloed door zijn leermeester Brouwer en door P.M. Van Hiele. De leerlingen moesten de wiskunde heruitvinden en Freudenthal sprak in 1976 zelfs de wens uit dat het vak wiskunde rond 2000 als zelfstandig leerdomein zou verdwijnen. Wiskunde zou dan als ‘Sachrechenen’ opgenomen zijn binnen toepassingen in leerdomeinen als wereldoriëntatie, fysica e.d. Op bijscholingen confronteerde Freudenthal de deelnemers graag met realistische ‘vuurtorenwiskunde’ waarbij ze methoden moesten bedenken om bijvoorbeeld de hoogte van een vuur- of watertoren te achterhalen. Van Hiele schreef al in 1957 in zijn proefschrift dat de klassieke rekenvaardigheid totaal voorbijgestreefd was.

Op het grote wiskunde-colloquium van 1983 in het Brussels Congressenpaleis steunde Freudenthal ons in de strijd tegen de *moderne wiskunde*. In een persoonlijk gesprek over de middag merkten we wel dat hij weinig interesse toonde voor de beproefde waarden. Freudenthal zelf heeft op hoge leeftijd ooit teleurgesteld bekend: *‘Toen ik begon met realistisch rekenen, konden basisscholieren alleen maar optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Erna konden ze zelfs dat niet meer’*, aldus Freudenthal.

## 5 Kritiek in ‘Panama-Post’: 1990-93

### 5.1 Inleiding

We formuleerden vanaf 1987 veel kritiek op de aanpak van het FI en op de Amerikaanse ‘Standards’ in *Onderwijskrant* en in Nederlandse tijdschriften. We probeerden aldus ook te voorkomen dat de Vlaamse eindtermen en de nieuwe leerplannen die strekking zouden overnemen. Dit gevaar was reëel. De DVO, de VLOR, een aantal onderwijskundigen en begeleiders propageerden voluit het constructivisme en de competentiegerichte aanpak – ook voor het rekenonderwijs. Een aantal normaalschooldocenten wiskunde zochten in die tijd aansluiting bij het FI-gedachtegoed. Ook *Luc Heyerick*, directeur Pedagogisch Centrum Gent en leerplanvoorzitter OVSG, opteerde voor de FI-aanpak. In het kader van de coöperatie stimuleerde ons ministerie de uitvoer van het ‘realistisch wiskundeonderwijs naar Cuba. Na een lange kruistocht tegen de moderne wiskunde, stonden we nu voor een nieuwe uitdaging.

### 5.2 Kritische bijdragen in ‘Panama-Post’ (1990 en 1993)

Via bijdragen en oproepen in *Onderwijskrant*, maar ook in *Panama-Post* en *Willem Bartjens* confronteerden we onze visie met deze van de Freudenthalers. We wilden aldus een open debat uitlokken. We hoopten in 1988 nog dat het FI zijn polariserende opstelling binnen het didactisch krachtenveld zou verlaten. In een *Onderwijskrant* artikel van 1988 over het *rekenen tot 20* poneerden we dat het ‘realistisch wiskundeonderwijs’ veel te vlug de oude waarden opzij schoof en een karikatuur maakte van het ‘rekenen van opa’ met veel aandacht voor het gestandaardiseerd en vlot berekenen. Het FI-tijdschrift ‘Panama-Post’ nam in juni 1990 deze bijdrage over. We schreven er o.a. dat *“de Wiskobas-groep (FI) te weinig aandacht besteedde aan alles wat te maken had met vlot berekenen en met parate kennis”* en dat dit jammer genoeg ook het geval was in de nieuwe realistische methoden. We stelden ook dat het bijbrengen van inzicht à la FI niet zomaar tot automatiseren leidde. We illustreerden vervolgens het belang van geautomatiseerde rekenvaardigheden aan de hand van het rekenen tot 20 (*Oerdegelijke kwadraatbeelden en modieuze rekenmannetjes*, *Panama-Post*, juni 1990). Er kwam geen reactie vanwege de Freudenthalers. De orthopedagoog *Osinga* reageerde wel positief en opteerde eveneens voor een meer gestructureerde benadering

van de rekenvaardigheid met meer aandacht voor automatiseren en memoriseren. De propagandisten van het rekenmannetje – mevrouw Jos Van Erp en haar nieuwe (reken)man prof. Van Parreren waren wel niet gelukkig met de kritiek op hun ‘rekenmannetje’ als getalbeeld. We reageerden op ‘het rekenmannetje’ omdat we merkten dat deze gekunstelde getalvoorstelling ook in Vlaanderen verspreid werd via de revalidatiecentra, het buitengewoon onderwijs e.d.

Vanuit onze bezorgdheid omtrent het gebrek aan structuur binnen het ‘realistisch’ rekenen publiceerden we in 1993 een langere bijdrage in *Panama-Post* onder de sprekende titel *‘Laat het rekenen tot 100 niet in het honderd lopen’* (Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskunde-onderwijs, jg. 11, 1993, nr. 3, p. 3-16). Hierop werd in het volgend nummer afwijzend gereageerd door *Adri Treffers*. De FI-directeur schreef dat onze aanpak meer aansloot bij de ‘traditionele ‘realistische visie, maar minder bij de recente, de meer constructivistische, “die meer de klemtoon legt op de zelfontdekkende benadering, de informele (eigen) berekeningswijzen en constructies van de individuele leerling”’. Volgens Treffers mocht men “vanuit het realistisch wiskundeonderwijs nieuwe stijl de leerlingen zeker niet opleggen hoe ze bijvoorbeeld aftrekkingen op het rekenrek of de getallenlijn moesten maken.” Voor gestandaardiseerde berekeningswijzen was niet langer ruimte meer. Wij opteerden voor het starten met een gestandaardiseerde berekeningswijze; pas later wordt dan ‘flexibel rekenen’ ingebouwd. ‘Flexibel rekenen’ is overigens mede gebaseerd op de voorkennis van vlotte berekeningswijzen: – 39 als – 40 en + 1 omdat – 40 vlot kan berekend worden. Onze vakdidactische boeken en onze wiskunde-artikels werden voortaan ook doodgezwegen in de FI-publicaties.

We kregen wel in hetzelfde nummer van *Panama-Post* de steun van prof. M. Beishuizen (Leiden) die de ‘realistische voorkeur om te starten met ‘gevarieerde’ berekeningswijzen afwees, en samen met ons koos voor het eerst aanbieden van gestandaardiseerde berekeningswijzen die makkelijk geautomatiseerd kunnen worden. We ontvingen ook een lovende reactie vanwege het *Centrum voor Educatieve Dienstverlening* (CED) van Rotterdam. J. de With (CED) schreef ons: “Met grote belangstelling hebben we bij het verschijnen van het artikel *‘Laat het rekenen tot honderd niet in het honderd lopen’* kennis genomen van uw visie. De reden van deze belangstelling was en is, dat wij op dit moment

*binnen het CED bezig waren met het ontwikkelen van een rekenmethode voor kinderen met rekenproblemen. Ook wij gaan er bijvoorbeeld van uit dat het ontbreken van de automatisering tot tien, de basis is van ernstige rekenproblemen. We zijn het verder eens met stellingen als: “Voor het vlot berekenen en automatiseren opteren we voor een sobere aanpak, wars van overbodige en omslachtige franjes. Het inoefenen van deelstappen is belangrijk. Leermiddelen en visualiseringen moeten eenvoudig en goed gestructureerd zijn en in dienst staan van de overgang naar het mentaal en verkort uitrekenen.”*

We beschreven onze kritiek op de FI-aanpak en onze eigen aanpak heel uitvoerig in ons boek *‘Rekenen tot honderd’* (Wolters-Plantyn, 1998). In dit boek tonen we ook aan dat de ‘realistische’ theorie geen rekening hield met de cognitieve architectuur en met geheugenbelastingstheorie (John Sweller). Stapsgewijs werken via het oerdegelijke principe van de *progressieve complicering* was uit den boze (zie ook uitleg hierover op pagina 9). Voor een samenvatting van onze veelzijdige kritiek in *‘Rekenen tot honderd’* verwijzen we naar de bijlage bij dit artikel.

## **6 Strijd binnen eindtermen- en leerplan commissie: 1993-1996**

### **6.1 Inleiding**

Toen rond 1990 duidelijk werd dat de ‘moderne wiskunde’ weer opgedoekt zou worden, was de vraag welke richting we uit moesten. Na een lange kruistocht tegen de new math waren de beproefde waarden ondergesneeuwd geraakt. We werden meteen ook geconfronteerd met een nieuwe bedreiging van de beproefde waarden, met het oprukkende constructivisme dat ook sterk het vak wiskunde beïnvloedde. Het ‘realistisch wiskundeonderwijs’ van het FI en de constructivistische ‘Standards’ schoven al te vlug de oude waarden opzij, en ze hingen een karikatuur op van het ‘klassieke rekenen’.

Ook in Vlaanderen en op onze lerarenopleidingen nam de sympathie voor het constructivistisch gedachtegoed en voor de aanpak van het FI en van de ‘Standards’ toe. Tijdens de eerste vergadering van de commissie eindtermen in 1992 was dit duidelijk voelbaar – vooral ook bij de vertegenwoordigers van de universiteit.

Via actieve betrokkenheid bij het opstellen van de eindtermen en van het leerplan (VVKaBaO), deden

we ons best om de oerdegelijke waarden van onze Vlaamse traditie te herwaarderen en om de nefaste constructivistische aanpakken te bestrijden. Op die manier slaagden we erin weerstand te bieden aan de nieuwe wiskundige hypes en de extreme kanten van het realistisch wiskundeonderwijs uit te bannen.

## 6.2 Strijd binnen eindtermencommissie

In 1992 werden we lid van de commissie 'Eindtermen wiskunde' en in 1995 van de leerplancommissie. Binnen de eindtermencommissie stonden bepaalde leden vrij positief t.o.v. het constructivisme van het FI en van de Amerikaanse 'Standards'. Zo zwaaiden *prof. Gilberte Schuyten* (RUGent) e.a. met de constructivistische Standards en met de stelling dat het bij wiskunde niet gaat om *knowing mathematics*, maar om *doing mathematics* (wiskunde doen!). Een belangrijke passage uit de begeleidende tekst bij de (ontwerp)eindtermen verwijst expliciet naar deze controverse: "*Sommige didactici nemen het standpunt in van constructivistisch/zelfontdekkend leren. Anderen pleiten meer voor een geleid-ontdekkende benadering. Dit betekent dat volgens de laatste kennis deels wordt aangereikt, de kinderen moeten niet alles zelf ontdekken, maar toch wordt er ook denk(activiteit) van hen verondersteld. De leerlingen moeten actief meedenken en vanuit aangereikte perspectieven leren 'verder denken'. Ook vanuit de vrees dat het 'zelf ontdekken' slechts weggelegd is voor de verstandigste kinderen, pleiten deze didactici voor meer structurering en voor het voldoende inoefenen en automatiseren van actief verworven kennis en vaardigheden....*".

We hadden zelf sterk aangedrongen op inlassing van deze passage – mede omdat we wisten dat de DVO-kopstukken volop het constructivisme propageerden. De constructivisten slaagden erin om volgende passage te laten opnemen: "*Om leerlingen zelfredzaam te maken binnen de evoluerende maatschappij zal voor het leergebied wiskunde en op het niveau van de lagere school de nadruk komen te liggen op het ontwikkelen van vaardigheden die kunnen helpen bij het oplossen van (nieuwe) problemen eerder dan op een vaststaand kennispakket.*" Aldus werd binnen de werkgroep een vergelijk bereikt en werd voor de lezer duidelijk dat er in Vlaanderen geen consensus omtrent de methodiek bestond.

We zorgden er verder wel voor dat in de lijst van concrete eindtermen de invloed van de constructivistische wiskunde relatief beperkt bleef en dat er

toch een 'vaststaand en vrij omvangrijk kennispakket' werd opgelegd – ook al is dit in strijd met de constructivistische uitgangspunten van 'doing mathematics'. In tegenstelling met de Nederlandse eindtermen, de Waalse 'socles de compétences' werden de wiskundige leerinhouden duidelijker en omvangrijker uitgetekend, veel concreter ook dan in de eindtermen Nederlands, Frans en Wereldoriëntatie. We gingen ook niet in op het voorstel van de DVO-directeur om de leerstof i.v.m. breuken te schrappen. We betreuren dat de DVO-directeur Roger Standaert en anderen achteraf beweerden dat ook bij de opstelling van de 'eindtermen' wiskunde vertrokken werd vanuit de constructivistische en 'realistische' filosofie.

Op een aantal vlakken verloor onze strekking wel het pleit, maar bij de latere opstelling van het leerplan konden we veel zaken weer rechtzetten. Enkele voorbeelden. De belangrijke klassieke tweedeling tussen 'gestandaardiseerd' en 'flexibel' rekenen werd uit onze ontwerp tekst voor de bewerkingen geschrapt. De constructivisten en Freudenthalers hebben weinig waardering voor *gestandaardiseerde* berekeningswijzen en dwepen met de term 'handig' of 'gevarieerd' rekenen. In onze ontwerp tekst wilden we met de tweedeling 'gestandaardiseerd' en 'flexibel' rekenen duidelijk maken dat we aansloten bij de klassieke aanpak en niet bij deze van het FI. Vlot en gestandaardiseerd berekenen bleef voor ons een belangrijke eindterm.

In het leerplan (VVKaBaO) hebben we het onderscheid tussen gestandaardiseerd en flexibel rekenen weer ingevoerd. Ook de parate kennis van de meest elementaire formules voor de berekening van oppervlakte en inhoud werden na lange discussie als eindtermen geschrapt. Die parate kennis was volgens de constructivisten nadelig voor het inzicht. Over het belang van de 'regel van drieën' en de 'traditionele vraagstukken' was er zelfs geen discussie mogelijk. Er mochten geen (klassieke) eindtermen voor vraagstukken (over bruto, tarra, netto; mengsels; ongelijke verdelingen ...) geformuleerd worden "*omdat het opsommen van een beperkt aantal contexten moeilijk verenigbaar is met het nastreven van wiskundeonderwijs waarin de band met de realiteit centraal staat*". De term 'vraagstukken' was voor een aantal commissieleden ook niet langer aanvaardbaar omdat deze term connotaties naar het klassieke rekenen opriep. Ook de term 'metend rekenen' sneuvelde en werd vervangen door de modieuze, maar beperkende FI-term 'meten'.

### 6.3 Strijd binnen leerplancommissie

In de context van de opstelling van nieuwe leerplannen formuleerden we onze vrees en onze bezwaren i.v.m. de mogelijke invloed van het constructivisme en de FI-aanpak – o.a. in de bijdrage *Mathematics: warming up and warning* in O.Kr. nr. 90. Bij de uitwerking van de nieuwe leerplannen (1995-1998) werden we geconfronteerd met 'constructivistische' (ontwerp)teksten waarin al te veel afstand genomen werd van het klassieke rekenen. We werkten intussentijd mee aan het opstellen van het leerplan (VVKaBaO) en slaagden erin de constructivistische refreintjes grotendeels uit te bannen. Ter illustratie citeren we even uit een constructivistische sneuveltekst: *"Het leren oplossen van problemen vanuit contexten moet voortaan centraal staan. De leraar kan geen kennis, inzichten en vaardigheden aanleren, maar stimuleert enkel constructieve leerprocessen. Gestandaardiseerde en dwingende methodieken en procedures moeten vermeden worden. Informele en intuïtieve berekeningswijzen moeten centraal staan."*

We reageerden uitvoerig op bovenstaande ontwerp-passage. We stelden in onze schriftelijke reactie voor om veel meer aan te sluiten bij de sterke kanten van de klassieke rekendidactiek die dreigden verloren te gaan door het intermezzo van de 'moderne wiskunde', de visie van het FI en de opkomst van het constructivisme. In het uiteindelijke leerplan komt de term 'constructivisme' geen enkele keer voor. We slaagden erin om een stevig pakket leerinhouden duidelijk te omschrijven, om de tweedeling *gestandaardiseerd versus flexibel rekenen* in te voeren i.p.v. de verwarrende FI-terminen als 'handig' of 'gevarieerd' rekenen, om meer aandacht te vragen voor het automatiseren en vastzetten van de kennis, om terug een aantal formules voor de berekening van oppervlakte en inhoud op te nemen. We voerden de dubbele term 'meten én metend rekenen' in om duidelijk te maken dat we in tegenstelling met de Freudenthalers en de *eindtermen*, ook veel belang hechten aan het klassieke *metend rekenen*.

In het hoofdstuk over de methodiek kozen we voor gevarieerde werkvormen naargelang van het onderwerp en de fase in de verwerving. Zelf vinden we overigens dat een leerplan geen stellige uitspraken over de methodiek mag bevatten; maar de overheid wou ook aanwijzingen voor de methodiek en evaluatie. We starten het methodiek-hoofdstuk als volgt: *"In het wiskundeonderwijs moeten kinderen*

*veel soorten wiskundige kennis, inzichten, vaardigheden, strategieën en attitudes verwerven. ... Zo'n brede waaier van doelstellingen vereist een groot scala van didactische scenario's. De leerinhoud en de concrete doelstelling die aan de orde is, speelt hierbij een belangrijke rol. Denk maar aan het verschil in aanpak bij het verwerven van inzicht in de tafels en anderzijds bij het automatiseren ervan. De wijze waarop de leerkracht een onderwijsleersituatie aanpakt is verder afhankelijk van de leeftijd en de ontwikkeling van de kinderen."* We besteden een aparte paragraaf aan het klassieke principe van het *stapsgewijs opbouwen van kennis en vaardigheden* (= progressief compliceren), een oerdegelijk principe dat de Freudenthalers lieten vallen. De steun vanwege de leerkracht wordt omschreven in termen van *uitleggen en demonstreren, helpen en leergesprekken opzetten*. We herleiden de rol van de leerkracht niet tot deze van coach. We wijzen op het belang van de aanschouwelijkheid, maar voegen er een 'klassieke' waarschuwing aan toe: *"Een overvloed en te grote variëteit aan leermateriaal en voorstellingsmiddelen kunnen de begripsvorming en de verinnerlijking bemoeilijken."* Hiermee nemen we ook afstand van de 'realistische aanpak' die de leerlingen eindeloos laten rekenen op de getallenlijn of met het rekenrek.

Ook bij de regionale voorstellingen van dit leerplan hebben we er uitdrukkelijk op gewezen dat we uitdrukkingen als *constructivisme* en *het kind construeert zelf zijn kennis* uitdrukkelijk vermeden. Voor het domein 'meten en metend rekenen' wezen we de deelnemers op het verschil met het eenzijdige domein 'meten' binnen de visie van het FI. We legden ook uit waarom we in tegenstelling met het FI en de eindtermen opnieuw formules voor oppervlakteberekening e.d. hadden ingevoerd.

In andere leerplannen komt de invloed van de constructivistische/realistische aanpak vooral tot uiting in het hoofdstuk over de methodiek, maar gelukkig weinig of niet in de kern van het leerplan, de concrete leerdoelen. In het *OVSG-leerplan* treffen we op pagina 10 een paragraaf aan over 'leren als een constructief proces'. We lezen: *"Het klassieke model van de kennisoverdracht biedt weinig garantie voor de mentale activiteit van de leerlingen. Die activiteit is er wel wanneer leerlingen zelf oplossingen zoeken voor wiskundige problemen, oplossingen die niet voorgekauwd werden maar die ze zelf moeten construeren en uitproberen. Constructief leren vergt dus probleemgericht onderwijs"* (OVSG-leerplan, 1998, p. 10). In een tekst van de OVSG-begeleiding lezen we verder: *"Het 'aan wiskunde doen' (een*

vertaling van de uitdrukking 'doing mathematics' in de Standards) komt in de plaats van wiskundige kennis. Kinderen bouwen zelf hun wiskunde op. Ze construeren zelf oplossingen. De nadruk ligt op eigen (informele) constructies en producties van leerlingen. Dit betekent dat de onderwijsgevende opgelegde methodes moet vermijden. Constructief leren staat haaks op kennisoverdracht" (OVSG-nieuws, 1995, nr. 5). In de wiskundemethodes die in het OVSG-net gebruikt worden, merken we echter dat er evenzeer gewerkt wordt met gestandaardiseerde en opgelegde berekeningswijzen. Ook in het ARGO-leerplan (gemeenschapsonderwijs) lezen we als algemene stelregel: "Wiskunde wordt door de leerlingen zoveel mogelijk door eigen activiteit verworven. ... We moeten de kinderen enkel begeleiden bij het zelf ontdekken" (ARGO-leerplan).

## 7 Themanummer constructivisme 2000

Vanaf 1990 trad het constructivisme ook in Vlaanderen steeds meer op de voorgrond. Het werd ook de officiële ideologie van de *Dienst voor Onderwijsontwikkeling (DVO)*, van de *VLOR* en van de beleidsmensen. In de tekst 'Uitgangspunten' van de eindtermen (1995) komt dit duidelijk tot uiting. *Monique Van De Ven*, docente wiskunde Normaal-school Mechelen, schrijft dat ook zij zelf en veel collega's binnen de lerarenopleiding aansluiting zochten bij het FI-gedachtegoed (*Het fenomeen gecijferdheid in de opleiding voor aanstaande leraren over de grens en weer*, Panama-Post, jg. 21, 2002, nr. 2). Ook aan de universiteit en binnen de DVO was dit het geval. *Van de Ven* voegde er wel aan toe dat Feys en Van Biervliet (Torhout) expliciet afstand namen van de FI-filosofie. Ook voor de aanpak binnen de lerarenopleiding bleef men het constructivisme propageren. In 'TRiOS op weg. Taal en Rekenen in Opleidingsdidactische Samenhang, een tussenbalans' (SLO, 2000) lezen we: "Voor opleiders betekent de nieuwe constructivistische kijk op leren dat zij hun eigen 'lesgeven' onder de loep moeten leggen om te zien of het de constructivistische toetssteen kan doorstaan." De TriOS-groep voegde er wel relativerend aan toe: "Met Raf Feys (Onderwijskrant 1997) vindt de TRiOS-ontwikkelgroep evenwel dat niet alles zonder meer overboord moet."

Als lid van de eindtermencommissie basisonderwijs (1993) en als lid van de leerplancommissie VVKBaO (1996) slaagden we er wel in de constructivistische invloed in te dammen. Ook auteurs van rekenmethodes raadpleegden onze publicaties en/of vroegen om advies; in bepaalde handleidingen

werden we gretig geciteerd. We merkten ook overal dat de verguisde *kwadraatbeelden* terug een plaats kregen. In de methodische richtlijnen in andere leerplannen kwamen de constructivistische refreintjes wel duidelijk tot uiting. Dit was ook het geval in leerplannen secundair onderwijs.

Het constructivistisch gevaar was nog niet geweken. Dit alles stimuleerde ons in september 2000 tot het publiceren van een themanummer over het oprukkende constructivisme en over de constructivistische wiskunde in het bijzonder. In *Onderwijskrant nr. 113* voorspelden we dat ook in Nederland een rekenoorlog zou uitbreken, net zoals in de *Verenigde Staten* na de publicatie van de vage en constructivistische eindtermen (*Standards*, NCTM 1989). De 'Standards' wilden een totale ommekeer vanuit het nieuwe credo dat stelde 'dat een leerling zijn eigen kennis moet construeren' en dat het voortaan gaat om 'doing mathematics', vooral problemen leren oplossen als centraal en vaag competentiedoel. Die 'Math War' leidde er o.a. toe dat de staat Californië afstand nam van de nationale 'Standards', een meer klassiek curriculum opstelde en betere resultaten behaalde. Pas vorig jaar kwam er een gevoelige bijstelling van de eenzijdige 'Standards'.

In het themanummer beschreven we uitvoerig de 'Math War' in de VS. We toonden vervolgens aan dat de Nederlandse aanpak van het FI in hetzelfde constructivistisch bedje ziek was. We verheugden ons over het feit dat er in 1999 scherpe kritiek op de FI-aanpak geformuleerd werd naar aanleiding van de zwakke prestaties op het PPO-peilings-onderzoek van 1997. Die kritiek was zeker heilzaam voor het basisonderwijs, maar jammer genoeg voerden intussen constructivistische hardliners van de groep Grave-meijer het hoge woord binnen het FI.

## 8 Betrokkenheid bij recent debat

We merkten dat er in 2007 in Nederland steeds meer bijdragen en rapporten verschenen waarin gewezen werd op de daling van het niveau en waarin het 'realistische wiskundeonderwijs' van het FI met de vinger gewezen werd. In 'Volgens Bartjens' van september 2007 ridiculiseerde *Marjolein Kool* de kritiek met de uitspraak: "Hoe moet ons rekenonderwijs er over enkele jaren uitzien? Cijferende kinderen of flexibel rekenende kinderen. Moet het handig rekenen afgeschaft worden?" Toen besloten we dat het opportuun was een themanummer aan deze thematiek te wijden.

Bij de voorbereiding van dit themanummer kwamen we in contact met prof. Jan van de Craats – lid van de commissie Meyerink – en met andere critici. We stuurden van de Craats en co wat ‘Vlaamse’ documentatie op: het Vlaams leerplan met leerdoelen per leerjaar (basisonderwijs), een samenvatting van onze veelzijdige kritiek op de aanpak van het FI en enkele vakdidactische publicaties. Die samenvatting (zie bijlage) werd o.a. opgenomen op de website van BON en daar door een 2000 mensen gelezen. Prof. van de Craats stelde inmiddels al een alternatief leerplan op dat mede geïnspireerd is op de publicaties die we hem toestuurd – Vlaams leerplan e.d. Voor het boek *De Gelukkige Rekenklas* (redactie Tom Braams en Marisca Milikowski, uitgeverij Boom) schreef *Pieter Van Biervliet* de bijdrage ‘*Effectief rekenonderwijs: niet te realistisch maar functioneel*’. Hij vergelijkt er de rekenaanpak van de Torhoutse Normalschool met deze van het Utrechtse Freudenthal Instituut.

## 9 Besluit

De invoering van de ‘moderne wiskunde’ leidde er toe dat de beproefde waarden in de verdrinking kwamen. Daarom pleiten we al sinds 1973 voor de herwaardering en verlevendiging van oerdegelijke aanpakken. Toen het extreem van de ‘moderne wiskunde’ dreigde vervangen te worden door het extreem van de constructivistische/realistische wiskunde deden we de nodige inspanningen om dit te voorkomen. We zijn tevreden dat we daar voor het basisonderwijs grotendeels in geslaagd zijn.

Dit betekent nog niet dat de strijd gestreden is. Het zal bijvoorbeeld nog een tijdje duren vooraleer de leerkrachten de oerdegelijke aanpakken even goed in de vingers krijgen als vroeger het geval was. De schade kan overigens nooit volledig hersteld worden en we zullen waarschijnlijk nooit meer het niveau van weleer bereiken.

We hopen dat de recente kritiek en evolutie in Nederland de ogen zal openen van de ‘constructivistische’ kapers op de Vlaamse kust. Denk maar aan de DVO (Entiteit Curriculum), de VLOR, de topambtenaren, de beleidsmensen en veel onderwijskundigen die nog steeds het constructivisme en het ermee verwante competentiegerichte denken propageren. Het debat in Nederland is ook interessant voor de toekomst van ons secundair onderwijs. Verderop in dit nummer besteden we een bijdrage aan het (ontwerp)leerplan 2009 voor de eerste graad dat ook sterk het constructivisme propageert.

## Bijlage: samenvatting kritiek op FI-aanpak

Het Freudenthal Instituut maakte vanaf 1980 een karikatuur van het rekenonderwijs anno 1970-80 en bestempelde dit ten onrechte als louter mechanistisch. Het is nochtans bekend dat de meeste mensen vroeger vlot konden rekenen. De misleidende en kunstmatige tegenstelling tussen realistisch en mechanistisch rekenonderwijs doet geen recht aan de klassieke vakdidactiek. De term ‘realistisch’ kreeg binnen het FI alle mogelijke betekenissen (toepassen op realiteit, zich realiseren, zelfconstructie, modelleren, enz.)

Volgens de klassieke vakdidactiek berust degelijk rekenen op *inspiratie* (inzicht), maar evenzeer op *transpiratie* (inoefenen, automatiseren en memoriseren, parate kennis). Het FI besteedde weinig of geen aandacht aan de mechanistische aspecten. In de realistische aanpak is er al te weinig aandacht voor het gericht oefenen van vaardigheden.

Ook in de klassieke rekendidactiek was er overigens aandacht voor inzicht. Maar het inzicht in de betekenis van bewerkingen e.d. is al bij al niet zo moeilijk als de Freudenthalers het voorstellen en vergt (in de lagere leerjaren) minder tijd dan het vlot leren berekenen. Voor het begrip optellen en aftrekken moet men bijvoorbeeld niet eindeloos in klas autobusje spelen à la Jan Van den Brink. Naast de weg van kennen naar kunnen, is er ook de weg van kunnen naar kennen. Van ‘*Kunnen naar kennen*’ was overigens de naam van de Vlaamse methode van Schneider rond 1945. De Freudenthalers veronderstellen verder ten onrechte dat geautomatiseerde en gememoriseerde kennis vlug wegdeemstert en dat dit bij inzicht niet het geval is.

Sterke kanten van het klassieke rekenen belandden zo in de verdomhoek. Deze ‘verlossende’ opstelling is inherent voor mensen die vrijgesteld worden voor de permanente revolutie van het onderwijs en ook voor de rest van hun leven vrijgesteld willen blijven. Vrijgestelden pakken bijna steeds uit met het verlossingsparadigma i.p.v. te vernieuwen ‘in continuïteit’.

Bij de open, context- en probleemgestuurde leerprocessen à la FI worden de leerlingen met te veel nieuwe zaken tegelijk geconfronteerd en kunnen ze te weinig aansluiting vinden bij (deel)vaardigheden en basiskennis die al verworven moet zijn en opgeslagen in het lange-termijngeheugen. De FI-theorie houdt geen rekening met de cognitieve

architectuur en met de geheugen-belastings-theorie (John Sweller) en vindt ook *progressieve complice-ring* uit den boze (zie ook op pagina 9).

Het FI onderschat het grote belang van het vlot en gestandaardiseerd hoofdrekenen, van het gestandaardiseerd cijferen, het vlot en gestandaardiseerd *metend* rekenen en van de parate kennis (tafelproducten, formules voor berekening van oppervlakte en inhoud, standaardmaten en metriek stelsel voor metend rekenen ...).

Vlot, vaardig en geautomatiseerd rekenen en parate kennis is maar mogelijk bij *gestandaardiseerd* rekenen (= vaste en korte berekeningswijze die op elke opgave toepasbaar is) en veel oefenen. Het aantal deelstappen moet hierbij zo klein mogelijk zijn omdat het werkgeheugen beperkt is. Traditioneel wordt aanvankelijk slechts 1 korte en gestandaardiseerde berekeningswijze aangeleerd. De Freudenthalers en constructivisten zijn tegen het gestandaardiseerd berekenen en opteren voor flexibel en gevarieerd hoofdrekenen en voor flexibel cijferen volgens eigenwijze en/of context- of opgabegebonden berekeningswijzen. Elke leerling moet hierbij zoveel mogelijk zijn eigen berekeningswijze ontwikkelen en rekening houden met de specifieke getallen en opgave. Achteraf worden de leerlingen in principe met die verschillende berekeningswijzen geconfronteerd. De meeste leerlingen geraken hierdoor in de war of geraken gefixeerd aan een berekeningswijze die veelal niet handig is. De Freudenthalers noemen dit ten onrechte 'handig' en beschouwen de andere aanpakken ten onrechte als onhandig en louter mechanistisch.

De Freudenthalers vergeten verder ook dat zo'n flexibel rekenen op de rug zit van het gestandaardiseerd rekenen. Enkel wie  $-40$  vlot kan berekenen, beseft eventueel dat hij  $-39$  ook vlot kan berekenen via eerst  $-40$  en vervolgens  $+1$ . Zwakkere leerlingen hebben echter toch nog problemen met zo'n eenvoudige vormen van flexibel rekenen.

Te veel en te lang 'voor-wiskunde', te lang 'rekenen in contexten' als doel op zich; te veel contextualiseren (context- of situatiegebonden berekeningswijzen e.d.), te weinig decontextualiseren. Zo worden het vakmatig rekenen en het cijferen afgeremd door binding aan een specifieke context. Een voorbeeld. Door bijvoorbeeld de binding van de aftrekking aan de lineaire context en aan een berekening op de getallenlijn (een traject van 85 km, al 27 km afgelegd, hoeveel km moet ik nog afleggen) wordt het basis-

inzicht in aftrekken als wegnemen vertroebeld en stimuleert men de leerlingen om aftrekken eenzijdig te interpreteren als aanvullend optellen:  $85 - 27$  wordt dan:  $27 + 3 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5$ . De leerlingen hebben een getallenlijn nodig en achteraf moeten ze dan nog die vele tussenuitkomsten optellen. Precies daarom betreurt het FI dat de leerlingen in de CITO- en PPON-toets hoofdrekenen geen gebruik mogen maken van potlood en papier en  $75 - 28$  nog echt *uit het hoofd moeten* berekenen. *Hoofdrekenen* is bij hen geen *hoofdrekenen* meer.

Foutieve benadering van de aanschouwelijkheid en te lang aanschouwelijk werken. Fixatie van leerlingen op aanschouwelijke hulpmiddelen: de leerlingen mogen veel te lang gebruik maken van hulpmiddelen als getallenlijn, rekenrek... Die realisten bemoeilijken het loskomen van de aanschouwelijke steun en het kort en handig uitrekenen. De vele moeilijke (lange) voorstellingswijzen van berekeningen op rekenrek en getallenlijn en de vele stappen bemoeilijken een gestandaardiseerde en vlotte berekening. De aanschouwelijke voorstellingen en materialen (rekenrek tot 20, getallenlijn ...) functioneren te veel en te lang als uitrekeninstrument in plaats van als modellen voor algemene berekeningswijzen die de overgang naar het louter mentaal rekenen vergemakkelijken.

Binnen de FI-aanpak worden de klassieke tafels van vermenigvuldiging niet ingeoeft en gememoriëerd zoals dit vroeger al het geval was in groep 4 (= tweede leerjaar). Ze worden ten onrechte verschoven naar groep 5 en er vervangen door flexibele berekeningswijzen op basis van het toepassen van eigenschappen van bewerkingen. Leerlingen berekenen dan bijvoorbeeld  $8 \times 7$  via  $4 \times 7 = 28$ ;  $8 \times 7 = 28 + 28 = 56$ . Ze maken veel fouten en de berekening vergt te veel tijd.

De tafels van  $x$  worden traditioneel in het 2<sup>de</sup> leerjaar aangeleerd. De meeste leerlingen beseffen dan al dat  $7 \times 8$  neerkomt op  $7 \times$  een groep van 8. Dit inzicht is voorlopig voldoende. Het eigenschapsrekenen wordt traditioneel pas in hogere leerjaren gepresenteerd en dit in de context van grotere opgaven als  $13 \times 7$ ,  $25 \times 7$ ... waar het toepassen van de eigenschappen een zekere handigheid oplevert. Maar ook dan gaat veel aandacht naar het gestandaardiseerd berekenen:  $13 \times 7 = (10 \times 7) + (3 \times 7)$ .

#### *Kritieken op constructivistische uitgangspunten :*

- te veel constructie van individuele leerling(en), te weinig waardering voor wiskunde als cultuur-

product en vakdiscipline, onderschatting van het socio-culturele karakter en van de functionele betekenis van de wiskunde. Te veel respect voor de eigen constructies en aanpakken van de leerling bemoeilijkt het leren van korte en vaste berekeningswijzen, de begeleiding, de verinnerlijking en automatisatie van de rekenvaardigheden.

- eigen berekeningswijzen bevorderen ook de fixatie van de leerling op eigen, informele constructies en primitieve rekenwijzen.
- eenzijdig 'bottom-up problem' solving, overbeklemtoning van zelfontdekking en informele begrippen en berekeningswijzen.
- te weinig sturing en structurering door de leerkracht, te weinig 'guided construction of knowledge'.
- te weinig stapsgewijs opgebouwde leerlijnen volgens het principe van de progressieve complicering. Waar we bij het rekenen tussen 20 en 100, bij het cijferen... een aantal stappen onderscheiden, leggen de Freudenthalers onmiddellijk de moeilijkste opgave (b.v. 54 – 28) voor.

Totaal overbodige invoering van het kolomsgewijs rekenen dat de leerlingen in de war brengt zowel inzake het gewone hoofdrekenen als inzake het cijferen dat normaliter ook bij het begin van groep 5 (= derde leerjaar) zou moeten starten. Bij het kolomsgewijs aftrekken met tekorten b.v. wordt het voor de leerlingen een poespas.

Het traditioneel *cijferen* wordt verwaarloosd en de Freudenthalers introduceren een totaal gekunsteld alternatief dat niets meer te maken heeft met wiskundig cijferen. Het cijferend FI-delen werd door Treffers en co als het model van realistisch onderwijs voorgesteld. Het FI-cijferen ontaardde echter in een soort langdradig hoofdrekenen op basis van schattend aftrekken van happen. De autobuscontext ('Hoeveel bussen met 36 plaatsen zijn er nodig om 1128 soldaten te vervoeren) én het primitief en zelf-constructief laten uitrekenen via het herhaald aftrekken van happen (b.v. 10 x deler 36, enz.), leiden de aandacht af van het handig cijferen dat gebaseerd is op het positioneel opsplitsen van het deeltal. Dit is een aanpak met veel deelresultaten die omslachtig is en die zich niet laat automatiseren, zodat het cijferend delen nooit een vaardigheid kan worden.

Onderwaardering voor het klassieke *metend rekenen* en voor de klassieke meetkunde – met inbegrip van de kennis van basisformules voor de berekening

van oppervlakte en inhoud. Het klassieke metend rekenen in de bovenbouw van het lager onderwijs wordt verwaarloosd. Daarom duidt men dit domein enkel met de term 'meten' aan. Om die eenzijdigheid te vermijden spreken we in het Vlaams leerplan (VVKaBaO) over 'meten én metend rekenen'.

We betreuren ook nog steeds dat volgens de eindtermen geen enkele formule voor oppervlakteberekening e.d. nog gekend moet zijn. In de leerplannen hebben we wel de basisformules opgenomen.

Geen evenwichtig en uitgewerkte visie op vraagstukken: te veel kritiek op klassieke vraagstukken, te weinig valabele alternatieven in realistische publicaties en methoden. Te weinig toepassingen (vraagstukken) ook voor metend rekenen en te weinig moeilijke opgaven. We begrepen ook niet waarom de duidelijke term 'vraagstukken' moest verdwijnen. De moeilijkheid bij veel context-vraagstukken ligt vaak eerder bij het onvoldoende kennen van de context (b.v. ervaring van parkeren met een auto in opgave over hoeveel auto's op parking van 70 bij 50 meter), bij het feit dat de tekst te lang en te moeilijk is en bij het feit dat er te veel berekeningen ineens bij betrokken zijn.

Kloof tussen idealistische theorie en de praktijk. In een klas met 20 leerlingen is het inspelen op individuele denkwijzen en berekeningswijzen gewoon niet haalbaar. In 'realistische' methoden wordt gelukkig minder realistisch gewerkt dan in de 'realistische theorie' en dit is nog meer het geval bij de leerkrachten. Dit bleek ook uit het MORE-onderzoek en uit dit van E. Wijffels (1994).

Uit onderzoek en ervaring blijkt dat de zwakke, maar ook de betere leerlingen de dupe zijn. Een aantal onderzoekers en auteurs (Osinga, Ruijsenaers, Vedder, Timmermans, van Luit, Ames...) stellen terecht dat de zwakkere leerlingen het meest de dupe zijn van de realistische en constructivistische aanpak. De sterkere leerlingen presteren onder hun niveau als gevolg van het te lang werken met concrete contexten en het tijdverlies bij de non-directieve aanpak van de rekenbasisvaardigheden. Er rest dan te weinig tijd voor moeilijkere opgaven en vraagstukken.



## Volksvertegenwoordiger Hoebeke bekritiseerde sympathie van Vlaamse overheid voor 'realistische' rekenaanpak op 19.06.06

Raf Feys

### 1 Inleiding

In *Onderwijskrant* las volksvertegenwoordiger Anne Marie Hoebeke (Open VLD) dat leerlingen – en de zwakkere in het bijzonder – vooral nood hebben aan een vaste en gestandaardiseerde berekeningswijze. In die bijdrage verwezen we ook naar recent onderzoek van *Timmermans* waarin deze aantoonde dat de 'realistische aanpak' van het Freudenthal Instituut (FI) nefast was voor zwakkere leerlingen. Mevrouw Hoebeke ging er terecht vanuit dat die realistische/constructivistische aanpak ook gepropageerd wordt door de eindtermen en de DVO en in bepaalde leerplannen. In de bijeenkomst van de commissie onderwijs van 29.06.2006 stelde mevrouw Hoebeke hierover een bezorgde vraag aan minister Vandembroucke.

In zijn antwoord stelde Vandembroucke – ten onrechte – dat de overheid zich principieel niet inlaat met pedagogische aangelegenheden. Vandembroucke voegde er vervolgens aan toe dat zijn medewerkers geen problemen hebben met de 'realistische' benadering van het FI. De minister verzweeg dat in de toelichting bij de officiële eindtermen gesteld wordt dat deze gestoeld zijn op constructivistische uitgangspunten en aansturen op het zelf construeren van kennis door de leerlingen.

Ook in leerplannen en opvoedingsprojecten van bepaalde onderwijsnetten wordt een constructivistische visie gepropageerd – met o.m. een verwijzing naar de zgn. 'realistische' visie van het Freudenthal Instituut (FI). Het aanleren van gestandaardiseerde berekeningswijzen wordt dan bijvoorbeeld afgeraden. De leerling moet zijn eigen kennis *construeren*.

Het is ook bekend dat ons ministerie destijds in het kader van de coöperatie met derdewereldlanden de realistische/constructivistische wiskunde van het FI naar o.a. Cuba exporteerde. Toen we hierover geraadpleegd werden, wezen we de coöperante noch tans op de nefaste kanten van deze aanpak.

### 2 Tussenkost mevrouw Hoebeke

"Mijnheer de minister, geachte leden, ooit heb ik een tijd gewerkt in het onderwijs. Ik kwam vaak tot de conclusie dat leerlingen zelfs met de eenvoudige regel van drieën moeite hadden. Zo was er het voorbeeld van de loonberekeningen voor een arbeider, met daarop de RSZ. Ik moest uitleggen dat er eerst 8 percent bij kwam en dan 12,07 percent af ging. Dat moest ik met handen en voeten uitleggen. Hetzelfde gold voor de berekening van de forfaitaire bedrijfslast bij verloning.

Ik las recent in het tijdschrift *Onderwijskrant* dat ik als gewezen leerkracht nog ontvang, dat de Nederlandse pedagoog Timmermans dit onderwerp heeft onderzocht. Hij is tot de conclusie gekomen dat leerlingen een verschillende aanleg voor wiskunde en rekenen hebben. De minderbegaafde leerlingen hebben problemen met de vele aangereikte wiskundige methodes (berekeningswijzen) waar ze zelf een oplossing uit moeten distilleren. Volgens professor Timmermans komen de bestaande *realistische* rekenmethodes de zwakker begaafde leerlingen niet ten goede. Zij zijn meer gediend met een gestructureerde rekenmethode. Maar in Nederland wordt op grote schaal de voorkeur gegeven aan de ontwikkeling van eigen berekeningswijzen. Ook de heer *Raf Feys*, een Vlaams pedagoog, verdedigt het principe dat goed rekenonderwijs gestructureerd rekenonderwijs is. In mijn schooltijd moesten we eindeloos oefenen. De resultaten van die oefeningen zaten in ons geheugen verankerd.

*Ook in Vlaanderen bestaat de mogelijkheid leerlingen zo veel mogelijk volstrekt willekeurige manieren te laten gebruiken om tot de juiste oplossing te komen. Deze mogelijkheid is zelfs in het pedagogisch project (van bepaalde schoolnetten) opgenomen. Het is een tijd geleden dat dit onderwerp in Vlaanderen nog eens is onderzocht. Als ik me niet vergis, is de recentste studie in de loop van de jaren negentig uitgevoerd door een Nederlandse onderzoeker die dan verbonden was aan de KU Leuven. (NvdR: prof. Ruijsenaers die tot dezelfde conclusie kwam als Timmermans en Feys.)*

*Mijnheer de minister, wat is uw visie op het in de studies aangehaalde en door pedagogen verdedigde gestructureerd rekenonderwijs? Hebt u de intentie het gestructureerd rekenonderwijs in de toekomst in te voeren? Zo ja, kunt u dit toelichten? Zo neen, waarom bent u dit niet van plan? Kunt u in verband met dit onderwerp iets in het vooruitzicht stellen? Ten slotte vinden we allemaal dat iedereen goed moet kunnen rekenen."*

### **3 Antwoord Minister Vandenbroucke**

"Het is niet gebruikelijk dat een minister van Onderwijs zijn visie op methodes naar voren brengt. Desondanks wil ik naar aanleiding van de vragen van mevrouw Hoebeke een aantal bedenkingen maken. Mijn eerste bedenking betreft het wetenschappelijk onderzoek naar rekenonderwijs. Er is ontzettend veel onderzoek over rekenonderwijs verschenen. Het door mevrouw Hoebeke aangehaalde proefschrift vormt hier een onderdeel van. In Vlaanderen is vooral de KUL op dit vlak erg actief. Professor De Corte en professor Verschaffel pleiten voor een krachtige leeromgeving. Ze opteren voor een goed uitgebalanceerde en in een sociale omgeving gekaderde combinatie van informatieverwerving en – verwerking. In discussies over methodes spelen opvattingen over wat belangrijk en minder belangrijk is ook een rol. De meningen hierover zijn vaak verdeeld. De onderzoeksresultaten zijn vaak niet-veralgemeenbaar en contextgebonden. Zolang de discussie onder deskundigen nog loopt, wil ik hierover a fortiori geen standpunt innemen.

*Mijn medewerkers zijn wel van mening dat het realistisch rekenonderwijs ook gestructureerd is. Volgens hen heeft het realistisch rekenonderwijs niet de bedoeling de leerlingen met alle mogelijke methodes te overstelpen. Het realistisch rekenonderwijs doet een beroep op het probleemoplossend vermogen en laat kinderen meedenken. In het realistisch onderwijs gaat het niet enkel om de uitkomst, maar vooral om het begeleide reken- en denkproces. De veronderstelling dat dit bij zwakkere rekenaars niet werkt, lijkt me vrij stigmatiserend.*

De heer Timmermans, de door mevrouw Hoebeke aangehaalde pedagoog, pleit ervoor om zwakkere rekenaars eerst een stevige basis te geven en om niet te snel naar een volgend taxonomisch niveau over te stappen. Dit sluit echter niet uit dat deze leerlingen ook realistisch rekenonderwijs kunnen volgen.

*In Vlaanderen geldt in principe de vrijheid van onderwijs. Dit houdt onder meer in dat de minister van Onderwijs geen onderwijsmethodes oplegt. Ik vertrouw op de professionaliteit van de schoolteams die een rekenmethode moeten kiezen. De scholen weten dat het belangrijk is om bij de sturing van het leerproces rekening te houden met de verschillende leerstijlen van de leerlingen."*

### **4 Geen inmenging van overheid?**

Zelf vinden we dat de overheid in officiële teksten wel geregeld uitspraken doet over de pedagogische aanpak. In de 'Uitgangspunten' van de door de overheid opgelegde eindtermen en basiscompetenties wordt expliciet gepleit voor constructivistische principes. In het verleden werd ook de moderne wiskunde door minister Vermeylen gepropageerd en opgelegd. Zonder zijn tussenkomst zou het nooit zo'n vaart gelopen zijn. De tussenkomst van het ministerie was er destijds ook i.v.m. de methodiek voor het taalonderwijs. Meer recent binnen de zorgverbreding moesten de scholen de door het Steunpunt NT2 (Leuven) gepropageerde *taalvaardigheidsdidactiek* volgen. De *inspectie basisonderwijs* propageerde tot voor kort heel expliciet het *'ervaringsgericht onderwijs'* van Laevers. De inspectie secundair onderwijs, de DVO en de VLOR propageren de *competentiegerichte aanpak*.

In de erkende proeftuinen van minister Vandenbroucke gaat het overigens vaak om projecten in de richting van het nieuwe, zelfstandige, competentiegerichte ... leren, die door de minister uitgekozen en dus ook indirect gepropageerd worden. In het overheidstijdschrift *KLASSE* worden bijna uitsluitend *modieuze* onderwijsopvattingen gepropageerd. Dit verklaart ook waarom publicaties, opvattingen en activiteiten van bijvoorbeeld de vereniging O-ZON nooit een vermelding krijgen. Jan T'Sas, hoofdredacteur *KLASSE*, deed onlangs wel zijn best om O-ZON te ridiculiseren in het tijdschrift *VONK* (zie website *VONK*).

## Gemeenschappelijk & lichter leerplan wiskunde in s.o.: minder rekenvaardigheid en abstractie, meer constructivisme

Raf Feys

### 1 Inleiding

In de context van ons O-ZON-pleidooi voor herwaardering van de basiskennis en basisvaardigheden kregen we ook opvallend veel respons van leraars en professoren wiskunde. Ze getuigden dat ook in Vlaanderen het niveau in het secundair onderwijs er op achteruit ging (zie punt 2). Op de radio betreurde de Leuvens *prof. em. Alfred Warrinnier* begin mei 2008 dat de 'moderne wiskunde' in ons secundair onderwijs steeds meer vervangen werd door een andere extreme visie, deze van de constructivistische 'fuzzy mathematics'.

Enkele maanden geleden verscheen het (ontwerp) leerplan 2009 van het Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair onderwijs voor de eerste graad – het zoveelste in de rij sinds 1970. "*De actuele denkwijze over wiskundevorming gaat uit van competenties en van de constructivistische gedachte dat leerlingen best zelf die competenties ontwikkelen*", aldus de leerplanontwerpers. De huidige gedifferentieerde a- en een b-leerplannen worden vervangen door een gemeenschappelijk leerplan dat lichter uitvalt en minder aandacht besteedt aan (abstracte) kennis. De leerplanontwerpers wekken op geen enkel moment de indruk dat ze kennis genomen hebben van de recente debatten en math-wars in Nederland en elders en van de kritiek in eigen land. Dat blijkt ook uit de eenzijdige bibliografie. De controversiële methodische en inhoudelijke opties worden als vanzelfsprekendheid geserveerd. Zo lezen we ook dat de *vaardigheid in de rekenalgoritmen* minder belangrijk is.

In Nederland werden de gemeenschappelijke leerplannen en de gemeenschappelijke basisvorming weer afgeschaft. In Nederland, de VS, Engeland, Franstalig België... beluisterden we de voorbije jaren veel kritiek op die controversiële en constructivistische opties. Te lage eisen, te weinig (algebraïsche) rekenvaardigheid, te weinig aandacht voor beproefde waarden en voor wiskunde als vakdiscipline, al te veel rekenen in contexten (situations-problèmes) enz. De leerlingen zijn onvoldoende voorbereid op het hoger onderwijs; de bijspiijkercursussen in het hoger en universitair onderwijs zijn talrijk. Al tien jaar geleden bestempelde de Nijmeegse professor *Frans*

*Keune* de 'realistische wiskunde' als *pannenkoek-wiskunde*. Hij verweet de Utrechters dat de leerlingen een belabberd wiskundig inzicht hebben. De leuke wiskunde en gekunstelde toepassingscontexten van het FI besteden volgens velen te weinig aandacht aan de wiskunde als cultuurproduct, aan de meer abstracte elementen en aan de rekenvaardigheid. Ook in de VS adviseert het *Final report of the 'National mathematics advisory panel'* (maart 2008) een niveauverhoging, een herwaardering van beproefde waarden, een meer evenwichtige didactiek met meer sturing vanwege de leerkracht, meer aandacht voor rekenvaardigheid en de taal van de wiskunde (zie pagina 16). In Franstalig België worden de zwakke prestaties door Nico Hirtt en vele anderen in verband gebracht met de vage competentiegerichte benadering. In een recente evaluatie bereikte slechts 20 % van de 14-jarigen de eindtermen, 40 % voldeed helemaal niet.

De vele klachten leidden in Nederland al tot de opstelling van nieuwe officiële richtlijnen voor zwaardere (examen)programma's wiskunde havo-vwo die beter voorbereiden op hogere studies. De kern van degelijk wiskundeonderwijs is volgens de toelichting opnieuw *het algebraïsch en analytisch rekenwerk* en de leerstofeisen worden verhoogd. Een aantal beproefde waarden worden ook in ere hersteld. De sympathisanten van 'realistische' wiskunde à la FI reageerden met het manifest '*Stop de afbraak van het wiskunde-onderwijs*'. Ze nemen het niet dat de 'realistische' en contextrijke 'everyday'-aanpak van het FI als 'franje' bestempeld wordt.

Dit alles stimuleert ons om ook een paar bijdragen aan wiskunde in ons secundair onderwijs te wijden. Bepaalde Nederlandse en Waalse critici geloven alvast dat Nederland en Wallonië kunnen leren van Vlaanderen. Ook het '*National mathematics advisory panel*' van de VS inspireerde zich aan de Vlaamse leerplannen basisonderwijs en eerste graad – naast deze van TIMSS-succeslanden als Singapore (*Foundations for success*, het *Final Report*, maart 2008). Maar straks krijgen we een nieuw leerplan dat meer de richting van het constructivisme en de zelfstandigheidsdidactiek uit wil.

Jammer genoeg is er in Vlaanderen geen open debat over ons (wiskunde)onderwijs. Toen we in de periode 1973-1982 kritische vragen over de 'moderne wiskunde' stelden, kregen we lange tijd niet de minste respons. Pas na 1982 kwam er enige openheid. Ook op onze kritiek op het constructivisme en op het realistisch wiskundeonderwijs van het FI kwam er weinig reactie. Maar toen we als O-ZON-actiegroep in 2007 vragen stelden omtrent de basis-kennis en basisvaardigheden, ontvingen we heel wat klachten i.v.m. wiskunde in ons secundair onderwijs en de didactische aanpak. In punt 2 gaan we hier even op in. Daarna staan we stil bij het nieuwe leerplan.

## 2 Kritiek op niveau en methodiek

### 2.1 Kritiek op niveau

*Prof. Stefaan Caenepeel (VUB) schreef ons: "Aan de universiteit ondervinden wij dat in enkele jaren zowel kennis als vaardigheden wiskunde van beginnende studenten sterk zijn achteruitgegaan. Ik heb het dan wel over echte vaardigheden, zoals bijvoorbeeld het optellen van breuken, opgaven over rechthoekige driehoeken ... Het zogenaamde vaardighedsgerichte onderwijs leidt niet alleen tot minder kennis, het leidt ook tot minder vaardigheden. De leerlingen kennen niets, maar kunnen ook niets. In Nederland heeft men dat al lang ondervonden. Ik wil hierbij dan ook uw o-zoninitiatief voluit steunen."* Prof. Caenepeel stelde ook al in 2001 terecht: *"Ik vrees voor het niveau van het onderwijs. De eindtermen voor wiskunde zijn bijzonder mager. Het is een minimum minimorum."*

*'Onze eerstejaars wiskunde krijgen een vak 'bewijzen en redeneren', vertelt Carolien Van Saam, monitor aan de Leuvense wetenschapsfaculteit. 'Vroeger kon iedereen b.v. een bewijs opstellen. Nu missen ze de precisie om iets op een wiskundige manier uit te schrijven.' Net zoals andere universiteiten organiseert de KU-Leuven al jaren cursussen wiskunde om het niveau van startende studenten bij te spijkeren. Zelfs aan praktijkgerichte hogescholen kunnen ze over het probleem meespreken. 'In onze kennisgerichte richtingen, zoals industriële wetenschappen, is bijspijkeren aan de orde', vertelt Jacques Peeters van de Hogeschool Antwerpen. ... De UGent organiseerde in december een rondvraag bij de professoren uit de eerste bachelor. Opvallend: 'de proffen klagen er vooral over dat de studenten vooral minder kunnen', zegt Annick Eelbode (Bijdrage in 'De Morgen' van 14.03.07: Leerlingen zijn niet dommer geworden. Het onderwijs haalt er gewoon*

*minder uit). In de context van de laatste wiskundeolympiade formuleerden naar verluidt ook een aantal professoren (Paul Igodt, Wim Schepens ...) kritiek op het dalende niveau. Relatief eenvoudige vragen werden door velen niet juist beantwoord.*

### 2.2 Kritiek op constructivistische methodiek

*Marie-Claire Deleersnijder, voorzitter van de Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleerkrachten, getuigde: "In wiskunde draait vandaag alles momenteel om inzicht. De didactische methode is ook gewijzigd, men spreekt van 'contextonderwijs'. Als leerkrachten worden we gestimuleerd om wiskunde-oefeningen te betrekken op actuele, concrete situaties. Minder abstracte theorie dus. Dat maakt dat 'bewijzen' minder goed gekend zijn. En mede doordat de leerlingen tegenwoordig bij zowat elke toets een rekenmachine of hun formularia mogen gebruiken, zijn ze minder goed in hoofdrekenen en rekenvaardigheid. Zelfs voor de kennis van de maaltafels, jawel. Ook analytische meetkunde komt niet meer in elk wiskundeprogramma voor" (In: Marjan Justaert, Vlaamse scholieren struikelen over maaltafels en sukkelen met dt-regels, DM, 6.12.06).*

Net zoals prof. Warrinnier heeft de voorzitter blijkbaar problemen met te veel 'contextwiskunde'. Andere termen hiervoor zijn 'fuzzy maths', 'everyday-maths' en/of 'gesitueerde wiskunde' in het constructivistisch jargon; 'situations-problèmes' in het Frans. In Nederland krijgt het FI veel kritiek met zijn 'contextwiskunde'. 'Fuzzy' en/of 'Everyday' Mathematics die veel werken met contexten en 'situations-problèmes' zijn soms wel leuk (fuzzy), maar het conceptuele, de abstractie en de wiskundetaal worden daardoor naar de achtergrond gedrongen, zodat niemand meer echte wiskunde kan leren en inzetten in de meest uiteenlopende toepassingsgebieden.

Vorig jaar stuurde ook de Gentse prof. Henri Verschelde een brief naar O-ZON waarin hij niet enkel zijn beklag deed over de wiskundige voorkennis van de studenten, maar ook wees op het dubieuze karakter van de constructivistische leertheorie die o.a. pleit voor zelfconstruerend en contextgebonden leren. Prof. Verschelde, een van onze eminentste wetenschappers, schreef: *"Geachte O-ZON-mensen, uw visie op degelijk onderwijs en uw kritiek op het constructivisme worden volledig gesteund door mensen met gezond verstand en met enig inzicht in hoe de realiteit werkelijk in elkaar zit. Als wetenschapper verbaast het me iedere dag opnieuw*

*welke larie sommige onderwijskundigen als 'wetenschappelijke theorie' de wereld durven insturen. Deze theorieën doen me heel erg denken aan de onzin die de constructivistische filosofen uitkramen en die op meesterlijke wijze aan de kaak gesteld is door Alan Sokal en Jean Bricmont in hun boek 'Intellectueel bedrog'. Beiden zijn collega's theoretische fysica. Ik probeer hen ervan te overtuigen om een analoog boek te schrijven over de constructivistische stroming in de onderwijskunde. Het is immers niet moeilijk om aan te tonen dat de constructivistische aanpak haaks staat op de wetenschappelijk gefundeerde bevindingen van de cognitieve psychologie. Gefeliciteerd ook met uw initiatief en uw zeer informatieve O-ZON-website."* Ook op het recente congres van de VVWL (Blankenberge, 30.06.08) beluisterden we in de wandelgangen analoge kritiek; L.V.M. beloofde ons een bijdrage hierover voor volgende *Onderwijskrant*.

In het nieuwe leerplan wordt geen rekening gehouden met de kritiek. Er wordt zelfs meer dan ooit gepleit voor de constructivistische en competentiegerichte aanpak (zie punt 3). We stelden de voorbije jaren ook vast dat de pedagogische begeleiding, de VLOR, WIVO ... geregeld prof. F. Dochy uitnodigden om zijn constructivistische hypes te komen verkondigen. Ook de DVO (Entiteit Curriculum) blijft heel sterk de 'constructivistische en competentiegerichte benadering van de kennisverwerving' propageren in de recente brochures van 'de conferenties na de peiling' van eindtermen. In een recente spreekbeurt (Aalst, 8.11.07) maakte professor Paul Kirschner evenwel brandhout van de recente didactische hypes inzake constructivisme, ontdekkend en leerlinggestuurd leren e.d. (Pieter Van Biervliet, *Leren: Broodje aap of wetenschap?* *Onderwijskrant* nr. 144, januari 2008).

### **3 Minder rekenvaardigheid & abstractie, constructivistisch en zelfstandig leren**

Veel Nederlandse critici hebben veel moeite met de realistische, contextgebonden en constructivistische aanpak van het FI. De kritische Nederlandse *Resonansgroep* wiskunde stelt o.i. ook terecht dat officiële documenten zoals een leerplan en/of de exameneisen geen preciese didactische richtlijnen mogen bevatten. De *Resonansgroep* is van oordeel dat didactiek uiteindelijk vooral een zaak is van de leerkracht die in vrijheid moet kunnen beslissen over de weg waarlangs hij zijn doel wil bereiken. Aanwijzingen of richtlijnen die een dwingend karakter suggereren, moeten worden vermeden. De twijfel-

achtige resultaten van het 'studiehuis' en het 'nieuwe leren' zouden in dit verband tot nadenken moeten stemmen. Het is ook bekend dat er methodisch gezien grote verschillen in opvattingen bestaan. Dit is een reden te meer om geen stellige uitspraken te doen in een leerplan dat enkel de leerplandoelen moet vastleggen.

Het verbaast ons dan ook dat het nieuwe (ontwerp) leerplan VVKSO veel stellige en controversiële uitspraken over de methodiek bevat. We citeren even het nieuwe leerplan: *"Ondertussen is het denken over het leren van wiskunde geëvolueerd. De 'constructivistische' leeropvatting stelt dat kennis beter actief geconstrueerd wordt door de lerende. Kennis kan niet zomaar passief overgedragen worden. ... Het gaat om een proces van structureren en generaliseren van de eigen ervaringen. Wiskundevorming biedt meer dan een voltooid bouwwerk van objectieve, abstracte, formele kennis. Steeds meer mensen kunnen wiskunde toepassen, ook als ze niet beschikken over de nodige vaardigheid in de rekenalgoritmen. Het gebruik van ICT werkt tijdsbesparend. ... Een actuele denkwijze over wiskundevorming gaat uit van competenties. Het gaat om een breed geheel van vorming, aansluitend bij een aantal algemene competenties en de constructivistische gedachte dat leerlingen best zelf die competenties ontwikkelen. In de vorming worden de verschillende aspecten van kennis, vaardigheden, attitudes en opvattingen geïntegreerd. ... Als er geen kennis aanwezig is, zal er uiteraard ook de competentie niet aanwezig kunnen zijn. Dit verantwoordt echter niet het geïsoleerd werken aan kennisverwerving. Kennis wordt beter verworven doorheen een actief leerproces... In de basisschool hebben leerlingen veelal kennisgemaakt met 'hoeken- en contractwerk' en andere vormen van activerend of begeleid zelfstandig leren. Ook in het secundair onderwijs moet het leren vertaald worden in aangepaste en activerende werkvormen."*

Het verwondert ons dat de leerplanopstellers er op aansturen om nog meer richtingen uit te gaan die momenteel in Nederland en elders sterk gecontesteerd worden: *constructivistische* methodiek, minder rekenvaardigheid, minder abstracte en vakdisciplinaire benadering, meer geïntegreerde aanpak, meer werken met algemene competenties. De uitspraak *'Steeds meer mensen kunnen wiskunde toepassen, ook als ze niet beschikken over de nodige vaardigheid in de rekenalgoritmen'*, wekt ook de indruk dat *rekenvaardigheid* minder belangrijk is. Dit zijn allemaal zaken die al een tijdje onder vuur liggen en

verantwoordelijk geacht worden voor de niveaudaling en malaise. In de VS wordt de niveaudaling grotendeels toegeschreven aan de invoering van de constructivistische 'Standards' van 1989 (zie ook volgende bijdrage). In Nederland wordt de realistische aanpak à la Freudenthal Instituut met de vinger gewezen. Terloops: ook de drammerige en oppervlakkige VVKSO-tekst 'zelfstandigheidsdidactiek' zint ons niet. De zwakkere leerlingen zullen het meest de dupe zijn van het verminderen van de (bege-)leiding en de sterkere zullen onderpresteren. *Activerend leren* bij 12- à 14-jarigen is o.i. vooral *interactief leren* dat goed geleid wordt door de leerkracht. In de hogere klassen van het basisonderwijs is het de door het leerplan gepropageerde hoeken en contractwerk overigens al op de terugtocht. In dit verband kunnen we ook veel leren uit het uitgebreid rapport 'Telling lessons from the TIMSS videotape' en de commentaar vanwege *Mathematically Correct* (zie volgende bijdragen).

#### 4 Gemeenschappelijk = lichter leerplan

Leerplanvoorzitter André Van der Spiegel deelde op 14 april 2008 in de krant 'De Morgen' mee dat er een nieuw leerplan wordt ingevoerd en dat dit leerplan lichter en minder abstract zou uitvallen. De verklaring hiervoor klonk aldus: "We stellen vast dat 12-jarigen veel moeite hebben met rekenen en met wiskundetaal."

De leerplanvoorzitter vermeldde er echter niet bij dat er niet langer gewerkt wordt met een (zwaarder) a- en een (lichter) b-leerplan voor respectievelijk aso- en andere leerlingen. Het plots opdoeken van het onderscheid tussen a- en b-leerplannen voor de A-stroom van de eerste graad, roept tal van vragen op. De leerkrachten en de scholen zelf werden hierover niet geraadpleegd. We vermoeden dat een peiling zou uitwijzen dat ze het hiermee niet eens zijn. Wil de katholieke koepel met de invoering van een gemeenschappelijk leerplan vooruitlopen op een eventuele comprehensieve eerste graad? Een peiling zou uitwijzen dat de meeste leerkrachten hier niet voor gewonnen zijn.

In Nederland wordt de daling van het wiskunde-niveau in de eerste graad vooral op naam gebracht van de invoering destijds van de gemeenschappelijke basisvorming met ook voor wiskunde een gemeenschappelijk leerplan voor alle leerlingen. Het gemeenschappelijke curriculum bleek voor vmbo-ers (= tso- en bso-leerlingen) te moeilijk en voor vwo-ers (= aso-ers) te gemakkelijk. Daarom werd de ge-

meenschappelijke basisvorming weer opgedoekt. In het rapport 'Rijk aan betekenis' van de Nederlandse commissie Toekomst WiskundeOnderwijs (2006) lezen we: "De uniformiteit in gemeenschappelijke doelen, niveau en wiskundige inhoud, is slecht gebleken voor de ontwikkeling van de talenten van havo- en vwo- leerlingen. Deze krijgen in de onderbouw te weinig kans om te groeien in wiskundekennis en zo geleidelijk aan inzicht te verwerven in de onderliggende wiskundige concepten." Ook de commissievoorzitter van het rapport-Dijsselbloem was heel streng in zijn oordeel: "De ideologie van de gelijke kansen leidde in de praktijk tot gelijke behandeling van zeer ongelijke leerlingen. Daardoor kregen de leerlingen niet de leerinhoud en begeleiding die ze nodig hadden."

Volgens onze leerplancommissie viel het leerplan van 1997 te zwaar uit. Waren beide leerplannen te zwaar, of enkel een van beide? Een gemeenschappelijk leerplan voor alle 12-jarigen leidt uiteraard tot het lichter maken in vergelijking met de vroegere a-versie. De sterkere a-leerlingen zullen met zo'n lichter en minder abstract leerplan onder hun niveau aangesproken worden (=niveaudaling). En als dit nieuwe leerplan zwaarder uitvalt dan de vroegere b-versie, dan zullen de b-leerlingen boven hun niveau worden aangesproken. We vrezen dus dat het leerplan voor de a-leerlingen te licht uitvalt en voor de b-leerlingen zwaarder. En wordt nu overigens al openlijk gezegd dat het wiskundeniveau van de aso-leerlingen te laag is en dat ze te weinig voorbereid zijn op bèta-richtingen. Een beperkte evaluatie van de al te minimale eindtermenissen volstaat geenszins om het niveau te bewaken. Vanuit de O-ZON-beweging vragen we een meer ernstige controle van de leerresultaten – net zoals de Nederlandse overheid dit nu vraagt.

#### 5 Besluit

In het nieuw leerplan 2009 wijken de polariserende methodische basisprincipes sterk af van de meer uitgebalanceerde visies die momenteel in Nederland en Frankrijk en in de VS door het *National Mathematics Advisory Panel* worden verkondigd en die aansluiten bij de visie van de meeste leerkrachten.

Een leerplan mag o.i. ook geen methodiek opleggen. Het VVKSO stelt terecht dat de inspectie zich niet mag moeien met de methodiek in klas, maar is anderzijds geneigd dit zelf te doen. De 3 hierop volgende bijdragen bevatten ook uitspraken die onze kritiek op het nieuw leerplan ondersteunen.

## **'Telling lessons from the TIMSS videotape' Guided instruction in Japan levert schitterende wiskunde-prestaties op**

**Raf Feys en Renske Bos**

### **1 Inleiding**

In het uitgebreid rapport *'Telling lessons from the TIMSS videotape'* onderzochten prof. Alan Siegel e.a. met behulp van video-opnames (een 300-tal lessen) welke de typische aanpak is van de wiskunde-didactiek bij 13- à 14-jarigen in Japen – en dat in vergelijking met de Verenigde Staten (zie Internet). Op die manier probeerden ze te achterhalen waarom de Japanse leerlingen zoveel beter presteren dan deze in de VS. Zij stelden vast dat in Japan het leerproces veel sterker geleid werd door de leerkrachten. Dit is volgens hen ook de verklaring voor de uitstekende score op TIMSS e.d. We vermoeden dat dit ook de belangrijkste oorzaak is van de goede score van de Vlaamse 14-jarigen. De Vlaamse leraars geven meestal nog gestructureerd les, ook al sturen eindtermen en leerplannen, inspecteurs, begeleiders, DVO, VLOR ... aan op zelfontdekkend leren en een constructivistische en competentie-gerichte aanpak.

### **2 Videotape-onderzoek**

Het videotape-onderzoek was aanvankelijk vooral in handen van beleidsadviseurs die in het verleden verantwoordelijk waren voor de uitwerking van leerplannen en methodieken die sterk constructivistisch geïnspireerd waren en waarbij de leerlingen zoveel mogelijk zelfstandig of in groepjes alles zelf moesten uitzoeken met minimale begeleiding vanwege de leerkrachten. Dit is ook de filosofie achter de zgn. 'Standards', eindtermen van 1989. Deze mensen waren niet geneigd de zwakke prestaties van de Amerikaanse leerlingen op naam te brengen van hun constructivistische filosofie. Enkele Amerikaanse beleidsmensen en adviseurs beweerden dat de Japanse leerkrachten de Standards-principes beter toepasten en aldus betere resultaten behaalden. Zij betreurden dat de leerkrachten hun constructivistische filosofie onvoldoende toepasten en stelden dat naarmate de filosofie van de *Standards* beter zou doordringen, de resultaten van de Amerikaanse leerlingen deze van de Japanse zouden evenaren.

Onafhankelijke onderzoekers van de video-tapes kwamen echter tot totaal andere conclusies. Uit de studie van professor Alan Siegel (New York) en van

anderen bleek precies het omgekeerde: *"De Japanse lessen verlopen niet volgens de constructivistische reformrichtlijnen à la Amerikaanse Standards-leerplan. Ze bevatten veel meer directe instructie en demonstratie dan zelfs de meer traditionele Amerikaanse lessen".* ... Zo lezen we: *"Japanese math instruction has been erroneously portrayed as favoring so-called discovery learning. Alan Siegel, a professor of computer science at New York University, took a careful look at Japanese math instruction and finds that the underlying approach is direct instruction and repetitive practice."* Siegel legde een dik rapport voor waarin hij de video's heel uitvoerig beschrijft en protocollert: *Telling Lessons from TIMSS Videotapes* (200 pagina's, zie Internet). Binnen het bestek van deze bijdrage kunnen we die uitvoerige beschrijvingen van de Japanse lessen in algebra, meetkunde, vraagstukken (problem solving) ... niet samenvatten. We staan hier enkel stil bij de conclusies van Alan Siegel.

Siegel betreurt dat in bepaalde officiële Amerikaanse rapporten omtrent het succes van de Japanse leerlingen de hoge kwaliteit van de *directe instructie* in Japan niet eens wordt vermeld. Zo hangt het recente *Glenn Commission Report* een totaal verkeerde en fabuleuze voorstelling van de Japanse aanpak op. We lezen in dat officieel rapport: *"In Japan, ... closely supervised, collaborative work among students is the norm. Teachers begin by presenting students with a mathematical problem employing principles they have not yet learned. They work alone or in small groups to devise a solution. After a few minutes, students are called on to present their answers; the whole class works through the problems and solutions, uncovering the related mathematical concepts and reasoning."* Volgens Siegel wordt hier ten onrechte de indruk gewekt dat de Japanse 14-jarigen na slechts enkele minuten nadenken problemen oplossen zonder hierbij principes en theorie te gebruiken die ze vooraf geleerd hebben.

De studie van Siegel wijst verder uit dat het laten samenwerken van de leerlingen – een belangrijk constructivistisch principe – geenszins centraal staat in het Japan: *"students rarely work in small groups to solve problems until they have worked first by themselves"*.

De pleitbezorgers van de constructivistische 'Standards' besteedden veel aandacht aan het aspect 'problem solving' (vraagstukken e.d.) binnen het Japanse onderwijs. Siegel weerlegt de stelling dat het succes van Japanse leerlingen met betrekking tot het *oplossen van vraagstukken* een gevolg zou zijn van het feit dat ze bij de start van het leerproces eerst zelf een lange tijd zelfstandig met de oplossing van problemen mogen worstelen. De Japanners besteden wel veel aandacht aan het leren toepassen van oplossingsmethodes en aan het oordeelkundig kiezen van uitdagende opdrachten om een grondig begrip van de oplossingsmethodes bij te brengen. Maar de sterke leiding hierbij is opvallend. Bij het bestuderen en vergelijken van de typisch probleemoplossende situaties (probleem-opgaven, vraagstukken) moet men volgens Siegel een groot aantal factoren incalculeren met inbegrip van het zelf worstelen met probleem versus uitgelegd krijgen, het gebruik van toenemende hints en modellering, en de al dan niet voorbereidende gesprekken met hints en toepasbare leerinhoud. Tegelijk moeten de rollen van de leerkracht bij de presentatie van allerhande problemen bekeken worden.

In het deel van het videomateriaal over problem-solving zien we leerkrachten aan het werk die de leerlingen instrueren in het toepassen van fundamentele principes om problemen op te lossen. Telkens merken we dat de klas vooraf al de basismethode geleerd heeft om de uitdaging aan te gaan. De leerlingen moeten vooraf al de methode goed begrepen hebben vooraleer ze succesvol toegepast kan worden.

*Deze vorm van instructie en leren vereist bovendien een diepgaand begrip van de onderliggende wiskunde en van haar moeilijkheidsgraad. De leerlingen moeten vooraf al degelijk voorbereid zijn zodat ze op een vlotte manier met die wiskundige inhoud kunnen omspringen. Meestal zullen de leerlingen niet in staat zijnde fundamentele begrippen en principes toe te passen in nieuwe situaties vooraleer ze stap voor stap geconfronteerd geweest zijn met voorbeelden die de leerkracht heeft uitgewerkt. Pas dan krijgen de leerlingen de kans om in de voetstappen van de leerkracht te treden en de aangeleerde aanpak op een nieuw probleem toe te passen.*

Dat zijn alle lessen die we moeten leren uit de videotapes van het Japanse onderwijzen. Zoals de videotapes aantonen kan een goede leerkracht elke stap in een probleemoplossing presenteren zonder telkens evenwel het antwoord zelf onmiddellijk te onthullen. Als men hieruit besluit dat de Japanse

leerlingen de ideeën en probleemoplossing zelfstandig ontdekt hebben, dan maakt men zich illusies.

Aan de hand van een gedetailleerde analyse van een groot aantal videotapes van wiskundelessen in Japan en Amerika concludeert Siegel dus dat *direct en guided instruction* veel meer aandacht krijgt in Japan dan in de Verenigde Staten. Het Japanse wiskunde-onderwijs vertoont geenszins de filosofie van het constructivisme binnen de Amerikaanse 'Standards'.

### 3 Belang van klassiek bordgebruik

In een andere studie van de videotapes wijst *prof. Makoto Yoshida* op het belang van het klassieke bordgebruik binnen het Japanse wiskundeonderwijs. *De professor betreurt dat Amerikaanse leerkrachten veel minder en veel minder effectief gebruik maken van het bord.* We lezen:

*"In Japan, carefully planned and well-organized blackboard use during a lesson is considered one of the most important teaching skills that fosters student understanding. In this paper, Makoto Yoshida, an expert in lesson study and Japanese teaching practices, describes how Japanese teachers develop effective use of the blackboard.*

*He explains a typical lesson process in Japan and how the use of the blackboard fits into that process. Yoshida describes six important functions of blackboard use in Japan:*

- *keeping a record of the lesson,*
- *helping students remember what they need to do and think about,*
- *helping students see the connection between different parts of the lesson and the progression of the lesson,*
- *contrasting and discussing ideas students present,*
- *helping to organize student thinking and discover new ideas,*
- *fostering organized student note taking skills by modelling logical organization."*

### 4 Besluit

De huidige Vlaamse praktijk vertoont o.i. veel gelijkenissen met de sterk geleide aanpak in Japan en leverde eveneens een goede TIMSS-score op. Er is geen reden om die aanpak drastisch te wijzigen.



## Mathematically Correct: 'Don't believe it. 'Reform math' in the U.S. does not mirror what successful countries use'

*De verantwoordelijken voor de constructivistische wiskunde-hervorming in de VS (Standards, 1989) waren geneigd te verkondigen dat de TIMSS-resultaten van de Amerikaanse leerlingen aan de lage kant waren omdat de leerkrachten nog niet voldoende hun constructivistische richtlijnen volgden. In het sterk scorende Japan zou dit wel het geval zijn. Ook de vereniging 'Mathematically Correct' reageerde hierop met het manifest 'Don't Believe It'. The Japanese system is NOT 'student-directed' or 'student-centered' but rather the progress of the class is carefully designed and directed by the teacher.*

- In Japan and Singapore, they do value the correct answer, NOT just the process or the effort.
- The Japanese kids get plenty of drill. They practice in class and at home, and some in after-school school (juku). They have workbooks for this purpose. Also, there is reason to believe that not all of this practice shows up as 'homework' in TIMSS data. While the 'reform math' advocates do NOT want drill, students in Japan are very competent in their math facts and use of operations. This success comes with practice.
- Part of the REAL difference between the U.S. and Japan is the organization of schools. Teachers concentrate on their subject matter lessons much more. The focus on the content of the lessons is the subject of the film *Polished Stones*. Such a focus is NOT typical in the U.S. under either 'traditional' or 'reform' designs.
- Most 'reform' programs push 'applications' very strongly. They want all practice to occur in the context of 'real-world' problems. They emphasize the concrete over the abstract. However, the symbolic abstraction that gives power to mathematics is not the enemy. The TIMSS videotape study showed that the proportion of *abstract presentations* was high in Japan (86 %). This successful country does NOT expect all mathematics to be learned in the context of applications.
- The Japanese classroom does NOT emphasize group activity.
- The Japanese texts do NOT look at all like the 'reform' texts in this country. If anything, they look more like the antithesis of 'reform'. They contain clear explanations and procedures, for example, rather than leaving all these matters up to the children to discover. Many new U.S. programs push a 'don't tell' approach, even admonishing parents NOT to teach solution methods to

their children. By contrast, the program in Japan is more likely to give explicit solution methods.

- The use of calculators is common in 'reform math'. In fact, the 1992 California Math Framework advocates their availability for all grade levels at all times, including use for homework, class work and tests. This is NOT true in Japan, where calculators are not used until later grades, and even then not used much.
- The American 'reform math' folks do NOT want a strong focus on proof in mathematics, and their programs evidence the gradual deletion of proof from the curriculum over the years. In fact, the TIMSS study report indicates ... *"It is likely that the kind of mathematics that students learn is related to the nature of the mathematics that they are asked to study. Although constructing proofs and reasoning deductively are important aspects of mathematics, American students lacked opportunities to engage in these kinds of activities. None of the US lessons included proofs, whereas 53 percent of Japanese lessons included proofs."* *"In a separate analysis of 30 lessons from each country conducted by a group of experienced college mathematics teachers, 62 percent of Japanese lessons were found to include deductive reasoning, compared to 21 percent in Germany and zero percent in the US."*
- There is a great tendency on the part of the "reform" movement to avoid details about just what a student should know and be able to do in each year of the curriculum. The NCTM Standards are *"...without specific recommendations for homework, grades, or any one part of the educational enterprise."* This is part of the REAL difference between the U.S. and other countries. There are national standards in both Japan and Singapore. In Japan, these standards are not very detailed, but they really don't need to be because they have a standardized curriculum.
- The new 'integrated' forms of high school mathematics are NOT similar to the programs found in countries like Japan, where the 'integrated' nature is fundamentally different. In one sense, 'integration' is essential – that is including algebraic thinking in geometry and vice versa. This is the case in Japan. However, they concentrate on algebra for part of the year and geometry for the rest of the year. By contrast, 'integrated' mathematics in some of the new U.S. high school programs doesn't concentrate on algebra or geometry at all. Instead, the focus is on specific problems. The hope is that students will absorb sufficient mathematics knowledge secondary to the process of dealing with varied "non-routine" problems. Success in Japan cannot be used to justify this new form of 'integrated' mathematics.

## Context- of gesitueerd rekenen remt inzicht en transfer af

Pieter Van Biervliet

### 1 Concepten vanuit contexten?

Binnen de constructivistische en competentiegerichte aanpak staat het contextrekenen en/of het 'gesitueerd' en 'geïntegreerd' rekenen centraal. Ook in het *leerplan 2009 VVKSO* voor de eerste graad s.o. wordt gepleit voor een geïntegreerde en constructivistische aanpak (zie bijdrage hierover). We lezen in de richtlijnen van de *Amerikaanse Standards* (1989) en elders dat wiskundige begrippen slechts begrepen worden als ze aangeboden worden in een context. De leerlingen moeten zelf wiskundige noties kunnen ontwikkelen op basis van reële problemen. Die problemen worden gepresenteerd in voor de leerlingen herkenbare contexten en komen vaak uit het dagelijks leven. Het onderliggende wiskundeconcept zou dan bijna automatisch volgen, via 'doing mathematics'. Ook binnen het 'realistisch rekenonderwijs' van het *Freudenthal Instituut* is dit een centraal principe.

In officiële teksten over wiskundeonderwijs wordt in Frankrijk, Franstalig België, Québec ... eveneens het voortdurend werken vanuit 'situations problèmes' opgelegd. Zo lezen we in het leerplan voor de lagere cyclus s.o. in Frankrijk: "*Il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour l'élève à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes (programme des collèges)*". Het gaat hier niet om het klassieke toepassen van zijn kennis in vraagstukken. We lezen in die context ook geregeld: "*Val de kinderen niet lastig met kale of abstracte opgaven. Kinderen hebben realistische contexten, levens-echte problemen nodig om goed te leren rekenen!*"

### 2 Kritiek op contextrekenen

In tal van landen beluisteren we veel kritiek op het context- of gesitueerd rekenen, op het voortdurend werken vanuit 'situations problèmes'. De kritische reactie van de Amerikaanse professor *David Klein* luidt: "*Applications are important and story problems make good motivators, but understanding should come from building the math for universal application. When story problems take center stage, the math it leads to is often not practiced or applied widely enough for students to learn how to apply the concept to other problems. Solutions of problems need*

*to be rounded off with a mathematical discussion of the underlying mathematics. If new tools are fashioned to solve a problem, then these tools have to be put in the proper mathematical perspective. Otherwise the curriculum lacks mathematical cohesion.*"

De kritiek van 'Mathematically Correct' luidt: "*Most 'reform' programs push 'applications' very strongly. They want all practice to occur in the context of 'real-world' problems. They emphasize the concrete over the abstract. However, the symbolic abstraction that gives power to mathematics is not the enemy. The TIMSS videotape study showed that the proportion of abstract presentations was high in Japan (86 %). This successful country does not expect all mathematics to be learned in the context of applications*" (zie vorige bijdrage).

In onze eigen publicaties besteden we heel wat aandacht aan het (on)doordacht gebruik van contexten (zie o.a. R. Feys, 1998; P. Van Biervliet, 2006). Het gaat hier al te vaak om een uitdrukking die vele ladingen dekt en om een soort toverformule. Men wekt dan de indruk dat men voortdurend vanuit contexten moet werken en dat de leerlingen zelf wiskundige noties, regels en/of berekeningswijzen moeten ontwikkelen op basis van reële problemen. Zelf maken we hierbij o.a. een onderscheid tussen drie soorten contexten: een eenvoudige instapcontext om een nieuw begrip aan te brengen, contexten in het kader van het vlot leren rekenen – die veelal overbodig zijn, en anderzijds de meer complexe vraagstukcontexten. We stelden o.a. dat het te lang werken met realistische contexten het abstraheren bemoeilijkt. Het gevaar bestaat immers dat de rekenkennis van leerlingen 'gesitueerd' blijft en dat zij die kennis niet in nieuwe en uiteenlopende situaties zullen kunnen toepassen. Met andere woorden, de leerlingen komen niet tot 'decontextualisatie' en 'transfer'. Zo hebben we de meeste moeite met het feit dat het *Freudenthal Instituut* het begrip 'aftrekking' steeds associeert met een lineaire context (b.v. afstand van 85 km, je hebt al 27 km afgelegd, hoeveel nog). Met deze context drijft men de leerlingen in de richting van het omslachtige aanvullend optellen van 27 naar 85. En daar ze in de fase van het vlot leren berekenen lange tijd gebruik mogen maken van de lineaire getallenlijn komen ze niet vlug

tot een gestandaardiseerde en korte berekeningswijze. Het werken met contexten en op aanschouwelijk niveau is complexer dan men veelal denkt.

### 3 Zonder abstractie geen transfer

In *De Standaard* van 30 april 2008 lazen we over een recente studie die eveneens tot de conclusie komt dat kinderen vaak beter concepten, regels en berekeningswijzen leren wanneer ze voldoende op abstract niveau werken, dan wanneer ze die concepten en regels moeten afleiden uit contexten, rekenverhalen of probleemsituaties (*The Advantage of Abstract Examples in Learning Math*, in *Science*, 25.04.08, pp. 454 -455). De studie werd uitgevoerd door drie onderzoekers van het *Centre for Cognitive Science van Ohio State University*: J. A. Kaminski, V. M. Sloutsky en A. F. Heckler.

Volgens *Kaminski e.a.* wijst hun onderzoek uit dat je abstracte wiskundige concepten niet echt kunt leren op basis van overwegend realistische rekencontexten. In verschillende experimenten werden de ene groep leerlingen concepten/regels aangeleerd via concrete voorbeelden aangeleerd, bij de andere groep via abstracte symbolen. Zo onderzochten Kaminski e.a. bijvoorbeeld de verschillende manieren waarop de commutativiteit (bijv.  $3 + 2$  of  $2 + 3$  blijft 5) en andere rekenregels werden geleerd. Sommige kinderen leerden de rekeneigenschappen ontdekken via tekeningen, contexten met kopjes water, stukjes pizza, en de andere op een meer abstracte wijze.

De meeste kinderen ondervonden geen enkel probleem om de regels te begrijpen, maar men stelde wel vast dat leerlingen die via abstracte voorstellingen hadden geleerd, gemakkelijker tot toepassing in nieuwe situaties (transfer) kwamen dan leerlingen die via realistische contexten werkten. Als het abstracte idee zelf wordt onderwezen, beheersen de leerlingen die toepassing veel beter. Leerlingen die een wiskundig principe leren aan de hand van praktische voorbeelden, weten vaak niet hoe ze dat principe moeten toepassen op nieuwe situaties. Ook als ze verschillende voorbeelden hadden gekregen, zei hun dat niets over een nieuwe toepassing. Zelfs niet als hen was gevraagd op de overeenkomsten tussen de voorbeelden te letten. De leerlingen die meer abstracte lessen hadden gekregen, wisten wel raad met nieuwe toepassingen. Ze waren er ook beter in dan de groep die eerst voorbeelden had gekregen en daarna abstracte regels. Kennelijk leidt al die concrete informatie in het voorbeeld alleen maar de aandacht van de essentie af.

Tot dezelfde conclusie kwamen de onderzoekers ook voor volgend probleem bij oudere leerlingen: *Een trein vertrekt om 18 uur uit station A en rijdt aan 40 km/h naar station B. Een tweede trein verlaat station B om 19 uur en rijdt aan 50 km/h naar station A. De stations liggen op 400 km afstand van elkaar. Wanneer passeert de ene trein de andere?* Het probleem kan via de volgende abstracte vergelijking worden opgelost:  $40(t + 1) = 400 - 50t$ , waarbij  $t$  de reistijd van de tweede trein is. Als leerlingen het probleem echter zelf met behulp van eigen ontwikkelde schema's moesten oplossen en niet via een abstracte vergelijking, dan waren zij ook niet in staat om de opgedane kennis in nieuwe situaties toe te passen (bijvoorbeeld in contexten met stijgend water). Bij de eerste groep was er wel die transfer.

Kaminski e.a. onderzochten de wijdverspreide – maar nooit geteste – opvatting dat leerlingen het beste via concrete voorbeelden leren rekenen. Volgens Kaminski zijn realistische contexten wellicht de beste manier om op het einde van het leerproces na te gaan of een leerling een welbepaald wiskundig concept beheerst, maar niet om nieuwe wiskundige concepten, berekenings- of oplossingswijzen aan te leren. In het dagblad 'Trouw' (25.04.08) lazen we hieromtrent: *“De uitkomsten verbazen prof. Jan van der Craats niet. ‘Bij het werken met voorbeelden ga je ervan uit dat de leerling zelf de theorie ontdekt. Maar dat werkt niet; dat is maar enkelen gegeven.’ Jan van Maanen, FI-directeur, stelt: ‘Veel schoolboeken blijven ook naar mijn idee erg veel in concrete voorbeelden hangen. Maar voor veel abstracte begrippen zoals functies geldt dat de meeste leerlingen er eerst een concreet beeld van moeten hebben voordat ze het zich eigen kunnen maken.’”*

Kaminski e.a. deden geen uitspraken over het gebruik van een context 'als instap' bij het aanbrengen van een nieuw begrip of oplossingswijze. Een korte instapcontext kan o.i. vaak bijdragen tot rekenbegrip.

#### Literatuur

- Abstracte wiskunde leert beter dan praktische voorbeelden. *De Standaard* 30/04 – 01/05/08, *Wetenschap*, p. 1.
- Feys, R. (1998). *Rekenen tot honderd*. Mechelen: Uitgeverij Wolters Plantyn.
- Kaminski, J.A., Sloutsky, V.M. & Heckler, A.F. (2008). The Advantage of Abstract Examples in Learning Math. *Science*, vol. 320, no. 5875 (p. 454 - 455).
- Van Biervliet, P. (2006). Effective teaching of numeracy: not too realistic, but functional! *ETEN 16, The Proceedings of the 16th Annual Conference of the European Teacher Education Network*, Greenwich: University of Greenwich (p.188-191).

**Redactiesecretariaat  
en eindredactie**

alle correspondentie i.v.m. artikels  
aan:  
Noël Gybels  
Steyenhoflaan 11  
3130 Betekom  
tel. 016 56 93 46  
owkrant@hotmail.com  
www.onderwijskrant.be

**Redactie**

Annie Beullens, Renske Bos, Eddy Declercq, Ann Deketelaere, Raf Feys, Ignace Geurts, Noël Gybels, Walter Lotens, Pieter Van Biervliet, Hilde Van Iseghem, Anita Wuestenberg, Danny Wyffels

Onderwijskrant brengt beschrijvingen van - en kritische reflecties over onderwijs en onderwijsvernieuwing. Bepaalde bijdragen zijn wetenschappelijk gestoffeerd; andere zijn een directe neerslag of weergave van opvattingen en ervaringen.

Onderwijskrant wordt gemaakt met medewerking van praktijkmensen en van medewerkers uit de lerarenopleidingen en de pedagogische en wetenschappelijke centra. Onderwijskrant is een onderwijs-tijdschrift met redactieleden uit de drie onderwijsnetten.



Lid van de Unie  
van de Uitgevers van  
de Periodieke Pers

**Abonnement (4 nrs.): € 16**

Buitenland: € 25  
Rekening: 001-0965165-91  
(BIC GEBABEBB / IBAN BE23 0010  
9651 6591) van Onderwijskrant vzw,  
3130 Betekom

Inlichtingen, bestellingen, proefnrs.  
bij **verantwoordelijke uitgever**:  
Noël Gybels  
Steyenhoflaan 11  
3130 Betekom  
tel. 016 56 93 46  
owkrant@hotmail.com

**Tijdschrift, verschijnt driemaandelijks**

**juli-augustus-september 2008 – € 5,00**

Themanummer: mad math en math-war	2
Wiskunde-oorlog en reddingsoperatie in Nederland	3
National Mathematics Advisory Panel pleit voor <i>computational proficiency plus conceptual understanding</i>	16
Kritiek van prof. Jan van der Craats op 'realistisch' wiskunde-onderwijs van Freudenthal Instituut	17
Marjolein Kool, hoofdredactrice 'Volgens Bartjens', bekend: <i>'Te weinig parate kennis en veel te weinig inoefenen'</i>	23
Kritiek op realistische FI-aanpak in PPON- onderzoek '97	24
Inzet voor evenwichtige rekendidactiek & leerplannen (1971-2008) & verzet tegen realistisch/constructivistisch wiskundeonderwijs	29
Volksvertegenwoordiger bekritiseerde sympathie Vlaamse overheid voor 'realistische' rekenaankpak op 19.06.06	41
Gemeenschappelijk & lichter leerplan wiskunde in s.o.: minder rekenvaardigheid en abstractie, meer constructivisme	43
<i>'Telling lessons from the TIMSS videotape'</i> <i>Guided instruction</i> Japan levert schitterende wiskunde-prestaties op	47
<i>"Don't believe it. 'Reform math' in the U.S. does not mirror what successful countries (Japan ...) use"</i>	49
Context- of gesitueerd rekenen remt inzicht en transfer af	50



**Indien hiernaast een x staat**

**is dit het (voor)laatste nummer**

**dat u ontvangt.**

**HERABONNEER dus om onderbreking**

**te vermijden!**